EXERCICE I
Polynômes de Laguerre et méthode de quadrature de Gauss

Partie I - Produit scalaire dans $\mathbb{R}_n[X]$

I.1 - Généralités

Q1. Soit $(P, Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$ et f la fonction $t \mapsto P(t)Q(t)\exp(-t)$.
Par produit, f est continue sur $[0; +\infty[$.

PQ est un polynôme que l'on peut écrire sous la forme $\displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k X^k$.

On a alors, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $t^2 f(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k t^{2+k} e^{-t}$.

Pour tout k, $\lim\limits_{t\to+\infty} t^{2+k}e^{-t} = 0$ donc, par somme, $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2 f(t) = 0$ et $f(t) = o(1/t^2)$. $2 > 1$ donc $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1; +\infty[$. f l'est donc aussi.
On en conclut que f est intégrable sur $[0; +\infty[$ et donc l'intégrale définissant $(P|Q)$ est convergente.

Q2. Soit $\varphi : (P, Q) \mapsto (P|Q)$.
— La question précédente prouve que φ est définie sur $(\mathbb{R}_n[X])^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
— Pour $(P_1, P_2, Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$, par linéarité d'intégrales généralisées convergentes, $\varphi(P_1 + \lambda P_2, Q) = \varphi(P_1, Q) + \lambda\varphi(P_2, Q)$: φ est linéaire à gauche.
— Par commutativité du produit dans $\mathbb{R}$, pour tout $(P, Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$, $\varphi(P, Q) = \varphi(Q, P)$: φ est symétrique ; étant linéaire à gauche, elle est bilinéaire et symétrique.
— Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. $\varphi(P, P) = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)^2 e^{-t} dt$.
Pour tout $t \in [0; +\infty[$, $P(t)^2 e^{-t} \geq 0$ donc, par positivité de l'intégrale, $\varphi(P, P) \geq 0$: φ est positive.
On suppose $\varphi(P, P) = 0$; alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)^2 e^{-t} dt = 0$.
Comme $t \mapsto P(t)^2 e^{-t}$ est continue et positive, d'après le théorème de nullité de l'intégrale, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $P(t)^2 e^{-t} = 0$ et $P(t) = 0$. Le polynôme P a une infinité de racines, donc est nul. Par conséquent φ est définie.
— **Conclusion :** φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X)$.

I.2 - Calcul d'un produit scalaire

Q3. On pose, pour $t \in \mathbb{R}^+$, $u(t) = t^k$, $v(t) = -e^{-t}$. u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$, pour $t \geq 0$, $u'(t) = kt^{k-1}$, $v'(t) = e^{-t}$. De plus, par croissance comparée, $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0$ donc, par intégration par parties, $\displaystyle\int_0^{+\infty} u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} u'(t)v(t)dt$ c'est-à-dire,

$$\int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt = k \int_0^{+\infty} t^{k-1} e^{-t} dt$$

Q4. Pour $k \in \mathbb{N}$, $(X^k|1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt$.
Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(k)$: "$(X^k|1) = k!$".
Pour $k = 0$, $(X^k|1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^{+\infty} = 1 = 0!$: $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathcal{P}(k)$ vraie.
D'après la question précédente, $(X^{k+1}|1) = (k+1)(X^k|1)$ donc, d'après l'hypothèse de récurrence,

$(X^{k+1}|1) = (k+1)k! = (k+1)!$: $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.
On peut alors conclure par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire, $(X^k|1) = k!$.

Partie II - Construction d'une base orthogonale

Propriétés de l'application α

Q5. Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\deg P \leq n$ donc $\deg P' \leq n-1$, $\deg P'' \leq n-2$; ainsi $\alpha(P)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à n.
De plus, par linéarité de la dérivation, α est linéaire donc α est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Q6. $\alpha(1) = 0$, $\alpha(X) = 1 - X$ et, pour $k \geq 2$, $\alpha(X^k) = k(k-1)X^{k-1} + kX^{k-1} - kX^k = -kX^k + k^2X^{k-1}$.
La matrice de α dans la base $(1, X, \cdots, X^n)$ est donc

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 4 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & -2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & n^2 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -n \end{pmatrix}$$

Q7. Cette matrice est triangulaire supérieure donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux à savoir $0, -1, -2, \cdots, -n$. α possède donc $n+1$ valeurs propres distinctes et $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension $n+1$ donc α est diagonalisable.
Finalement, α est diagonalisable et $\mathrm{Sp}(\alpha) = \{-k;\ k \in [\![0; n]\!]\}$.

Q8. D'après la question précédente, le polynôme caractéristique de α est scindé à racines simples donc les sous espaces propres de α sont de dimension 1 : $\dim \ker(\alpha + k id_{\mathbb{R}_n[X]}) = 1$.

Q9. Soit Q_k un vecteur (non nul) engendrant $\ker(\alpha + k id_{\mathbb{R}_n[X]})$ et c_k son coefficient dominant.
c_k est non nul et $P_k = \dfrac{1}{c_k}Q_k$ est un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$, de coefficient dominant égal à 1 vérifiant $\alpha(P_k) = -kP_k$.
Si R_k est un polynôme vérifiant ces propriétés, en particulier, $R_k \in \ker(\alpha + k id_{\mathbb{R}_n[X]})$ donc il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $R_k = aQ_k$. Le coefficient dominant de R_k est 1 donc $a = \dfrac{1}{c_k}$ et $R_k = P_k$.
Par conséquent, il existe un unique polynôme $P_k \in \mathbb{R}_n[X]$, de coefficient dominant égal à 1 et vérifiant $\alpha(P_k) = -kP_k$.

Q10. Soit d le degré de P_k
Si k est non nul, on peut identifier les coefficients de degré k pour obtenir $-d = -k$ donc $d = k$.
Pour $k = 0$: $\alpha(1) = 0$ et 1 est un polynôme de coefficient dominant 1 tel que $\alpha(1) = -0 \times 1$ donc, par unicité, $P_0 = 1$, de degré 0.

Q11. On vient de voir que $P_0 = 1$.
Soit $P = X + a$ un polynôme de degré 1 et de coefficient dominant 1.
$\alpha(P) = 1 - X$ donc $\alpha(P) = -P$ si et seulement si $a = -1$. Ainsi $P_1 = X - 1$.
De même, on pose $P = X^2 + bX + c$. $P' = 2X + b$, $P'' = 2$ et $\alpha(P) = 2X + (1-X)(2X+b) = -2X^2 + (4-b)X + b$ donc $\alpha(P) = -2P$ si et seulement si $4 - b = -2b$ et $b = -2c$ d'où $b = -4$ et $c = 2$.
Par conséquent, $P_2 = X^2 - 4X + 2$.

II.3 - Orthogonalité de la famille $(P_0, \cdots, P_n)$

Q12. Par définition, $(\alpha(P)|Q) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (tP''(t) + (1-t)P'(t))Q(t)e^{-t}dt$.

on pose $u(t) = tP'(t)e^{-t}$. u et Q sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$, $u'(t) = e^{-t}(tP''(t) + P'(t) - tP'(t))$; par croissance comparée, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} u(t)Q(t) = 0$ donc, par intégration par parties,

$(\alpha(P)|Q) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)e^{-t}dt$.

Q13. En procédant de même mais en partant de $(P|\alpha(Q))$ et en échangeant les rôles de P et Q, on obtient $(\alpha(P)|Q) = (P|\alpha(Q))$.

Q14. Soit k et l deux entiers distincts de $\mathbb{R}_n[X]$.

D'après $Q13$, $(\alpha(P_k)|P_l) = (P_k|\alpha(P_l))$ et, d'après $Q9$, $-k(P_k|P_l) = -l(P_k|P_l)$; or $k \neq l$ donc $(P_k|P_l) = 0$

Conclusion : $(P_0, \cdots, P_n)$ est une famille orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$; elle ne comporte pas le vecteur nul donc elle est libre et elle contient $n+1$ vecteurs donc c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Partie III - Méthode de quadrature de Gauss

Q15. Soit $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$.

Sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, on considère les applications $\varphi : P \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}dt$ et $\psi : P \mapsto \displaystyle\sum_{i=1}^n \lambda_i P(x_i)$.

φ et ψ sont des applications linéaires sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ donc elles sont égales si et seulement si elles coincident sur tous les vecteurs de la base $(1, X, \cdots, X^{n-1})$.

Pour $i \leq n-1$, $\varphi(X^i) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^i e^{-t}dt = i!$ et $\psi(X^i) = \displaystyle\sum_{j=1}^n \lambda_j x_j^i$.

Pour tout $i \in [\![0; n-1]\!]$, $\varphi(X^i) = \psi(X^i)$ équivaut donc au système :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0! \\ 1! \\ \vdots \\ (n-1)! \end{pmatrix}$$

Q16. La matrice $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$ est la matrice de Vandermonde associée aux réels $x_1, x_2, \cdots, x_n$ qui sont deux à deux distincts donc le déterminant de V est non nul. V est donc inversible et le système précédent admet une unique solution : il existe un unique n-uplet $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ vérifiant la relation $(*)$ pour tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Q17. Soit $P = \displaystyle\prod_{i=1}^n (X - x_i)^2$.

$P \in \mathbb{R}_{2n}[X]$ et, pour tout i, $P(x_i) = 0$ donc $\psi(P) = 0$.

Par contre, $t \mapsto P(t)e^{-t}$ est continue positive et non identiquement nulle sur $[0; +\infty[$ donc $\varphi(P) > 0$.

Par conséquent,

$$\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}dt \neq \sum_{i=1}^n \lambda_i P(x_i)$$