PROBLÈME

Soit $p \in]0,1[$. On pose $q = 1 - p$.

On considère un automate qui génère successivement les lettres C ou P jusqu'à obtenir une certaine séquence prédéfinie.

On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'automate génère la n-ième lettre à l'instant n de façon indépendante de toutes les générations précédentes. On suppose également qu'à chaque génération, les lettres P et C ont des probabilités p et q (respectivement) d'être générées. Suivant les parties considérées, on définit différents niveaux que l'automate peut atteindre.

On considère dans tous les cas que l'automate est initialement au niveau 0. On se propose alors d'étudier essentiellement l'existence de l'espérance et de la variance de la variable aléatoire correspondant au temps d'attente de la séquence prédéfinie à travers sa série génératrice.

Pour cette étude probabiliste, on mobilise diverses propriétés analytiques (surtout sur les séries entières) et quelques propriétés d'algèbre linéaire.

Dans les parties **I**, **II** et **V**, on examine le temps d'attente pour les séquences C puis CC, puis CPC et CCPPC. La partie **II** est indépendante de la partie **I** et traite de questions préliminaires sur les séries entières qui seront investies dans les parties **III** et **V**. La partie **IV** est indépendante des parties précédentes et traite les questions préliminaires d'algèbre linéaire qui servent exclusivement dans la partie **V**. La partie **III** ne dépend de la partie **I** que par la question **Q4** et de la partie **II** que par la question **Q10**. La partie **V** utilise seulement la question **Q11** de la partie **II** et la partie **IV**.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note P_n l'évènement « l'automate génère la lettre P à l'instant n » et C_n l'évènement « l'automate génère la lettre C à l'instant n ».

Partie I - Étude d'un cas simple

Dans cette partie, on dit que l'automate passe du niveau 0 au niveau 1 dès qu'il génère la lettre C. Si, en revanche, il génère la lettre P, alors il reste au niveau 0. L'expérience s'arrête dès que l'automate a atteint le niveau 1. On résume l'expérience par la figure 1 suivante :

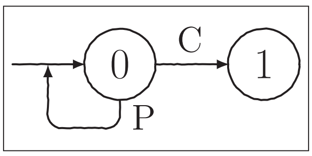

Figure 1

On note Y l'instant où, pour la première fois, l'automate atteint le niveau 1. On admet que Y est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ telle que $Y(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$. On note G_Y la série génératrice de Y et R_Y son rayon de convergence.

On sait alors que $R_Y \geqslant 1$ et que :

$$\forall t \in]-R_Y, R_Y[, \quad G_Y(t) = \mathbf{E}(t^Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(Y = n)t^n.$$

Q1. Reconnaître la loi de Y et préciser en particulier $\mathbf{P}(Y = n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Q2. Montrer que $R_Y = \dfrac{1}{p} > 1$ et que : $\forall t \in \left]-\dfrac{1}{p}, \dfrac{1}{p}\right[, \quad G_Y(t) = \dfrac{qt}{1-pt}$.

Q3. Montrer que G_Y est 2 fois dérivable en 1 et que $G'_Y(1) = \dfrac{1}{q}$ et $G''_Y(1) = \dfrac{2p}{q^2}$.

Q4. Donner les valeurs de $\mathbf{E}(Y)$ et de $\mathbf{V}(Y)$.

Partie II - Séries entières

Soit $z \in \mathbb{C}$ et $a \in \mathbb{C}^*$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n(a) = -\dfrac{1}{a^{n+1}}$.

Q5. Montrer que $\sum u_n(a) z^n$ est une série entière de rayon de convergence égal à $|a|$.

Q6. Montrer que si $|z| < |a|$, on a : $\dfrac{1}{z-a} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(a) z^n$.

Soit a, b et λ des nombres complexes non nuls. Dans les questions **Q7** à **Q10**, on suppose que $|a| < |b|$. On définit alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k(a) u_{n-k}(b)$ et pour tout réel t tel que $|t| < |a|$, $f(t) = \dfrac{\lambda t^2}{(t-a)(t-b)}$.

Q7. Montrer que l'on a :

$$v_n = \frac{1}{ab^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{b}{a}\right)^k = \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{a^{n+1}} - \frac{1}{b^{n+1}}\right).$$

Q8. Trouver un équivalent simple de v_n quand n tend vers $+\infty$.

Q9. En déduire que le rayon de convergence de $\sum v_n z^n$ est égal à $|a|$ et que si $|z| < |a|$, alors

$$\frac{1}{(z-a)(z-b)} = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n z^n.$$

Q10. Justifier que f est développable en série entière au voisinage de 0 et que la série entière qui lui est associée possède un rayon de convergence R_f tel que $R_f = |a|$.

Soit a, b, c et λ des nombres complexes non nuls. On suppose que : $|a| \leqslant |b| \leqslant |c|$.

Pour tout réel t tel que $|t| < |a|$, on pose : $g(t) = \dfrac{\lambda t^3}{(t-a)(t-b)(t-c)}$.

Q11. Justifier que g est développable en série entière au voisinage de 0 et que la série entière qui lui est associée possède un rayon de convergence R_g tel que $R_g \geqslant |a|$.

Partie III - Étude d'un cas intermédiaire

Dans cette partie, on suppose que l'automate passe du niveau 0 au niveau 1 en générant la lettre C. De même, l'automate passe du niveau 1 au niveau 2 en générant la lettre C. Si, en revanche, il génère la lettre P, alors qu'il est au niveau 0 ou 1, il retombe au niveau 0. L'expérience s'arrête dès que l'automate a atteint le niveau 2, c'est-à-dire dès que l'automate aura généré la séquence CC. On résume l'expérience par la figure 2 suivante :

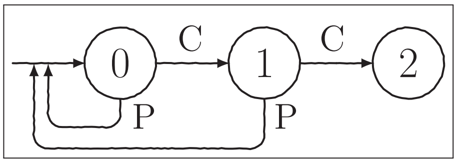

Figure 2

On note Z l'instant où, pour la première fois, l'automate atteint le niveau 2. Ainsi Z est le temps d'attente de la séquence CC.

On admet que Z est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ telle que $Z(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $p_n = \mathbf{P}(Z = n)$. On note G_Z la série génératrice de Z et R_Z son rayon de convergence. On rappelle que $R_Z \geqslant 1$.

Q12. Calculer p_1, p_2 et p_3.

Q13. Justifier que $(P_1, C_1 \cap P_2, C_1 \cap C_2)$ est un système complet d'évènements.

Q14. En déduire que pour tout $n \geqslant 3$, on a : $p_n = pp_{n-1} + pqp_{n-2}$.

Q15. En déduire que pour tout $t \in [-1, 1]$, on a : $G_Z(t)(1 - pt - pqt^2) = q^2t^2$.

Pour $t \in \mathbb{R}$, on note $Q(t) = 1 - pt - pqt^2$, $\Delta = p^2 + 4pq > 0$, $a = \dfrac{\sqrt{\Delta} - p}{2pq}$ et $b = \dfrac{-\sqrt{\Delta} - p}{2pq}$.

Q16. Montrer que $Q(-1) = 1 + p^2 > 0$ et que $Q(1) = q^2 > 0$.

Q17. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $Q(t) = -pq(t - a)(t - b)$.

Q18. Montrer que $1 < |a| < |b|$.

Pour tout réel t tel que $|t| < |a|$, on définit $f(t) = \dfrac{q^2t^2}{1 - pt - pqt^2}$.

Q19. Montrer à l'aide de la question **Q10** que f est développable en série entière au voisinage de 0, que sa série entière associée est G_Z et que $R_Z = |a|$.

Q20. Montrer que, pour tout $t \in \left]-|a|, |a|\right[$, on a : $G_Z(t) = \dfrac{q^2t^2}{1 - pt - pqt^2}$.

Q21. Montrer que Z admet une espérance et une variance puis que $\mathbf{E}(Z) = q^{-1} + q^{-2}$.

Q22. Vérifier, à l'aide des questions **Q4** et **Q21**, que $\mathbf{E}(Z) \geqslant \mathbf{E}(Y) + 1$ où Y est la variable aléatoire définie en partie **I**.

Q23. Pouvait-on prévoir ce résultat ?