Questions obligatoires :

Maths : Partie 1 **Physique :** Q C1-C2-C3 **Informatique :** Q C4-C5a-C5b

Pour les plus motivés : intégralité du sujet

Ce problème aborde l'étude de la transformation de Fourier utilisée pour le traitement des signaux analogiques. Elle permet de modéliser le comportement fréquentiel d'un signal. La partie 1 étudie quelques propriétés de la transformée de Fourier d'un signal analogique continu par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$. La partie 2 étudie le cas particulier dun signal périodique. Le résultat auquel elle aboutit est utilisé dans la partie 3 pour démontrer le théorème de l'échantillonnage de Shannon.
On note

- E_{cpm} le $\mathbb{C}$ espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continues par morceaux sur $\mathbb{R}$ et intégrables sur $\mathbb{R}$;
- $\mathcal{S}$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continues sur $\mathbb{R}$ telles que $\forall k \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto x^k f(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

1 Transformation de Fourier

Pour toute fonction $f \in E_{cpm}$, on considère la fonction $\mathcal{F}(f)$ (*transformée de Fourier de* f) définie par

$$\forall \xi,\ \mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2\pi i t\xi}\, dt$$

1.A On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Justifier que φ appartient à E_{cpm} et montrer que sa transformée de Fourier $\mathcal{F}(\varphi)$ est égale à la fonction ψ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \psi(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \quad \text{et} \quad \psi(0) = 1$$

.

1.B -

1.B.1 Justifier que ψ est développable en série entière. Préciser ce développement ainsi que son rayon de convergence. En déduire que ψ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

1.B.2 Prouver

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \int_n^{n+1} |\psi(x)|\, dx \geq \frac{2}{\pi^2(n+1)}$$

En déduire que ψ n'est pas intégrable et donc n'appartient pas à E_{cpm}.

1.C Soit $f \in E_{cpm}$. En utilisant le théorème de continuité des intégrales à paramètre, montrer que la fonction $\mathcal{F}(f)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

1.D Soit $f \in \mathcal{S}$.

1.D.1 Justifier que, pour tout entier naturel n, la fonction $x \mapsto x^n f(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

1.D.2 Démontrer que la fonction $\mathcal{F}(f)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \xi \in \mathbb{R},\ (\mathcal{F}(f))^n(\xi) = (-2i\pi)^n \int_{-\infty}^{+\infty} t^n f(t)e^{-2i\pi t\xi}\, dt$$

1.E On considère la fonction $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par $\theta(x) = \exp(-\pi x^2)$, pour $x \in \mathbb{R}$.

1.E.1 justifier que $\theta \in \mathcal{S}$ et que $\mathcal{F}(\theta)$ est solution de l'équation différentielle

$$\forall \xi \in \mathbb{R},\ y'(\xi) = -2\pi\xi y(\xi)$$

1.E.2 Etablir que $\mathcal{F}(\theta) = \theta$.
On admettra que $\int_{-\infty}^{+\infty} \theta(x)\, dx = 1$.

2 Cas de fonctions périodiques

Pour tout entier naturel n, on note S_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{2\pi ikx}$$

Soit $f\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et 1-périodique. On considère :

- la fonction g définie sur $[-1,1]$ par

$$\forall x \in]-1,1[\setminus\{0\},\ g(x) = \frac{f(x)-f(0)}{\sin(\pi x)} \qquad g(0)=0 \qquad g(1)=g(-1)=-g(0)$$

- la suite de complexes $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n(f) = \int_{-1/2}^{1/2} f(x)e^{-2\pi inx}\,dx$$

2.A

2.A.1 Montrer que la fonction g est de classe C^1 sur $]-1,1[\setminus\{0\}$ et continue sur $]-1,1[$.

2.A.2 Calculer la limite de g' en 0. Par exemple à l'aide d'un développement limité, en déduire que g est de classe C^1 sur $]-1,1[$.

On citera rigoureusement le théorème du prolongement dérivable.

On admet dorénavant que g est de classe C^1 sur $[-1,1]$.

2.B Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer l'intégrale $\int_{-1/2}^{1/2} S_n(x)\,dx$.

2.C Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\setminus\{0\},\ S_n(x) = \frac{\sin((2n+1)\pi x)}{\sin(\pi x)}$$

2.D Justifier que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) = f(0) + \int_{-1/2}^{1/2} g(x)\sin((2n+1)\pi x)\,dx$$

2.E A l'aide d'une intégration par parties, montrer l'existence d'un réel C tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left|\int_{-1/2}^{1/2} g(x)\sin((2n+1)\pi x)\,dx\right| \le \frac{C}{2n+1}$$

2.F Soit $t \in [-1/2,1/2]$. On considère la fonction G_t définie sur $[-1/2,1/2]$ par

$$\forall x \in \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right],\ G_t(x) = f'(x+t)\sin(\pi x) - (f(x+t)-f(t))\pi\cos(\pi x)$$

Etablir l'existence d'un réel D, indépendant de x et de de t, tel que

$$\forall x \in \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right],\ \forall t \in \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right],\ |G_t(x)| \le Dx^2$$

2.G Prouver l'existence d'un réel E tel que

$$\forall t \in \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right],\ \left|f(t) - \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{2i\pi kt}\right| \le \frac{E}{2n+1} \tag{2.1}$$

On pourra introduire la fonction $h_t\ :\ x \mapsto f(x+t)$.

3 Formule d'échantillonage de Shannon

Soit $f \in \mathcal{S}$ dont la transformée de Fourier $\mathcal{F}(f)$ est nulle en dehors du segment $[-1/2, 1/2]$. on pose

$$\forall k \in \mathbb{Z},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \psi_k(x) = \psi(x+k) \tag{3.1}$$

où ψ est définie à la question 1.B.

3.A Justifier que $\forall n \in \mathbb{N},\ (\mathcal{F}(f))^{(n)}\left(\frac{1}{2}\right) = (\mathcal{F}(f))^{(n)}\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$.

3.B Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$, qui est 1-périodique et qui vaut $\mathcal{F}(f)$ sur l'intervalle $[-1/2, 1/2]$. Montrer que h est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

3.C A l'aide de l'inégalité (2.1), prouver l'existence d'une suite de nombres complexes $(d_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ telle que la suite de fonctions $\left(x \mapsto \sum_{k=-n}^{n} d_k e^{2\pi i k x}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\mathcal{F}(f)$ sur $[-1/2, 1/2]$.

3.D Démontrer que la suite de fonctions $\left(\sum_{k=-n}^{n} d_k \psi_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.
On notera symboliquement $f = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_k \psi_k$.

3.E Etablir que $\forall j \in \mathbb{Z},\ f(-j) = d_j$.
L'égalité $f = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(-k)\psi_k$ traduit la reconstruction du signal f à partir de l'échantillon $(f(k))_{k\in\mathbb{Z}}$.

C / Spectre d'un instrument de musique

Les instruments de musique n'émettent pas des sons harmoniques comme ceux des sous-parties A et B. Nous allons dans cette sous-partie étudier le son d'un instrument à vent.

C1. Quelle est la différence entre le spectre d'un son créé par un instrument de musique (une flûte par exemple) et le spectre d'un bruit ? On rappelle qu'un bruit est un signal où toutes les fréquences sont présentes.
Expliquer pourquoi on peut utiliser les résultats des ondes harmoniques (sous-partie B) pour l'étude des sons des instruments.

C2. La figure 2 ci-dessous donne l'acquisition d'un son émis par un violon (figure 2.a) et son spectre (figure 2.b).

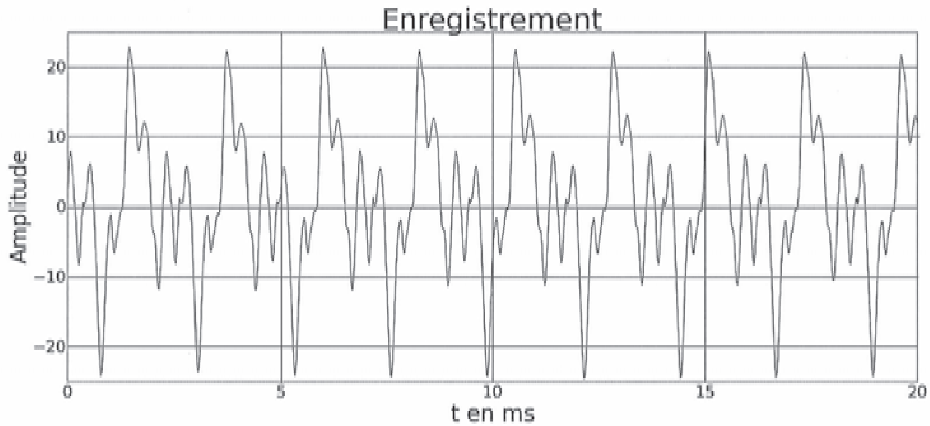

Figure 2.a - Enregistrement d'un son émis par un violon
(l'amplitude est graduée en unité arbitraire)

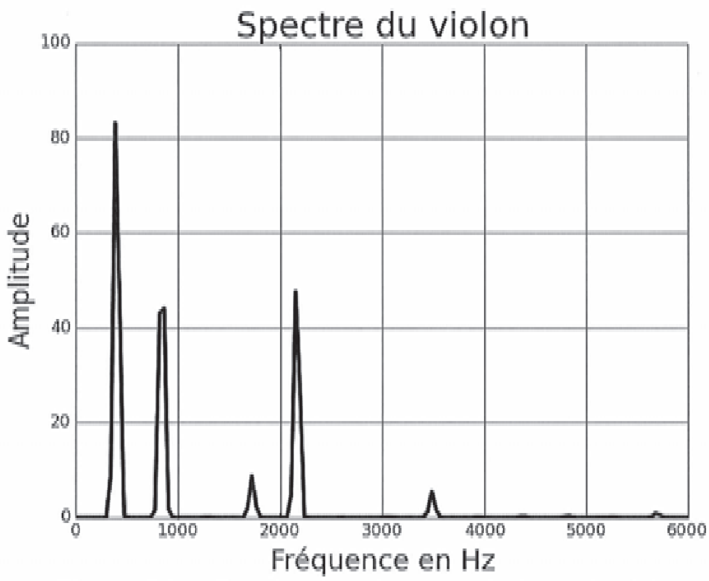

Figure 2.b – Spectre du même son émis par le violon
(l'amplitude est graduée en unité arbitraire)

C2a. Mesurer la fréquence de la note et sa période en expliquant votre démarche, notamment en complétant les figures ci-dessus. Les résultats sont-ils compatibles entre les deux figures ?

La figure 3.a ci-dessous donne les acquisitions de deux sons (émis par une flûte (a) et par un harmonium (b)) qui correspondent à la même note. La figure 3.b. donne le spectre de ces deux instruments mais ils ont été mélangés.

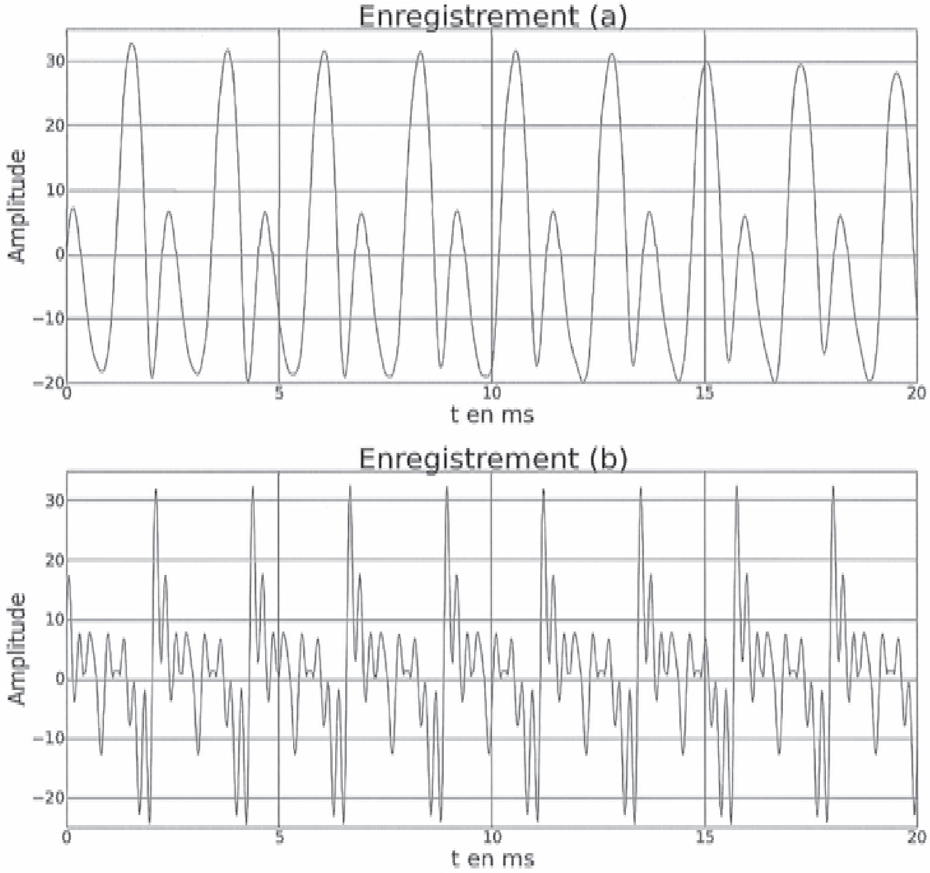

Figure 3.a - Enregistrements de sons émis par une flûte (a) et par un harmonium (b)
(l'amplitude est graduée en unité arbitraire)

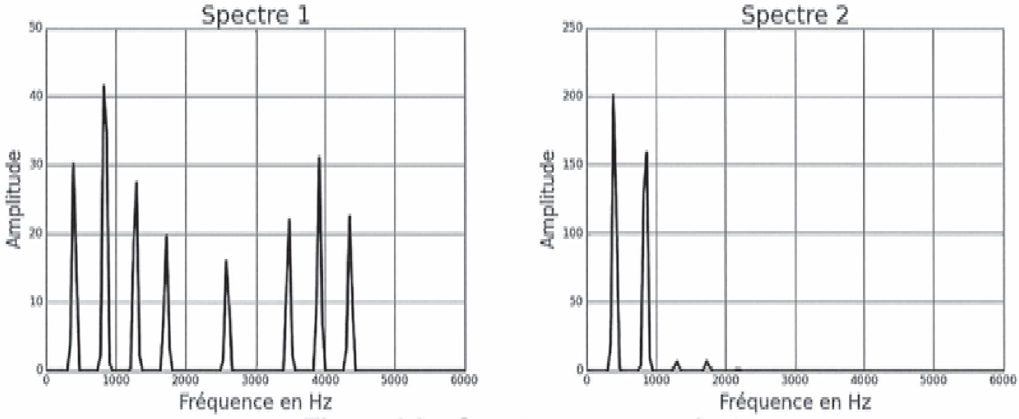

Figure 3.b - Spectres correspondants
(l'amplitude est graduée en unité arbitraire)

C2b. Attribuer à chaque spectre (1 et 2) son instrument (flûte (a) ou harmonium (b)) en justifiant ce choix.

C3. Pour calculer le spectre d'un signal sonore, on fait une acquisition numérique du son, puis on réalise la FFT (« Fast Fourier Transform » ou « transformée de Fourier rapide » en français) du signal numérique. Pour que le spectre soit correct, il faut prendre quelques précautions, notamment dans le choix de la fréquence d'échantillonnage.

On pourra utiliser avantageusement des schémas pour répondre aux questions suivantes.

C3a. Quel critère doit respecter la fréquence d'échantillonnage f_e ?
Quel est le nom du phénomène qui apparaitrait dans le cas d'un mauvais choix de f_e ?
Proposer une fréquence d'échantillonnage f_e sachant que les fréquences audibles vont de 20 Hz à 20 kHz. Justifier.

C3b. Citer une situation dans laquelle le critère de la question C3a n'est pas vérifié.
Comment procéder expérimentalement pour éviter le phénomène gênant décrit ci-dessus ?

On se propose maintenant d'écrire un script python pour calculer la transformée de Fourier d'un signal. On rappelle qu'il est indispensable de détailler les points principaux de l'algorithme ou du code avant de l'écrire, ou de commenter ses grandes lignes.

En langage python, les nombres complexes s'écrivent `x+yj` où `x` et `y` désignent respectivement les parties réelles et imaginaires du complexe (il est impératif de coller `y` et `j` et d'écrire le nombre `y` : le nombre *j* s'écrit `1j`). Les principales commandes peuvent être illustrées par

```
z=2+3j                    # Définition d'un complexe z
t=z**3+2*z/(1+1j)         # Calculs
z.conjugate()             # Renvoie le conjugué de z
abs(z)                    # Module
```

De plus, le module `numpy` de python permet de manipuler les nombres complexes simplement. En effet, la fonction `exp` (calcul de l'exponentielle) de ce module, que l'on supposera importée, accepte un argument complexe et réalise le calcul mathématique attendu. Enfin, on supposera aussi importée `pi`, variable du module `numpy` qui contient la valeur flottante de la constante mathématique π. Seules `pi` et `exp` seront supposées importées au début du programme.

La transformée Fourier d'un tableau `T` de taille *N* est un tableau $\hat{T}$ de même taille dont les valeurs sont données par la formule suivante :

$$\forall k \in [\![0, N-1]\!]; \qquad \hat{T}_k = \sum_{\ell=0}^{N-1} T_\ell exp\left(-\frac{2j\pi k\ell}{N}\right)$$

C4. On va d'abord écrire un algorithme naïf.

C4a. Écrire une fonction `omega` prenant comme argument deux entiers `a` et `N` et renvoyant le nombre complexe $exp\left(-\frac{2ja\pi}{N}\right)$.

C4b. En déduire une fonction `TF` renvoyant la transformée de Fourier d'un tableau `T` donné en argument.

C4c. Déterminer la complexité de `TF` dont l'entrée est un tableau de *N* éléments. On donnera la réponse en $\Theta(f(N))$.

C5. Transformée de Fourier rapide

Un autre algorithme utilisant le paradigme « diviser pour régner » a été proposé par J. Cooley et J. Tukey en 1965.
On suppose que N est pair, de la forme $N = 2p$. Soit T un tableau de taille $2p$, on note P et I les tableaux de taille p donnés par $P = [T_0, T_2, \dots, T_{2p-2}]$ et $I = [T_1, T_3, \dots, T_{2p-1}]$.
On note $\hat{P}$ et $\hat{I}$ les transformée de Fourier de P et I.

On admet que pour tout $k \in [\![0,2p-1]\!]$, on a, avec $N = 2p$:

$$\forall k \in [\![0, N-1]\!]; \qquad \hat{T}_k = \begin{cases} \hat{P}_k + exp\left(-\frac{2j\pi k}{N}\right)\hat{I}_k & \text{si } k \in [\![0, p-1]\!] \\ \hat{P}_{k-p} + exp\left(-\frac{2j\pi k}{N}\right)\hat{I}_{k-p} & \text{si } k \in [\![p, 2p-1]\!] \end{cases}$$

C5a. Écrire une fonction `separe`, qui étant donné un tableau `T` donné en argument, renvoie un couple de tableaux `(P,I)` où `P` est constitué des éléments de `T` d'indice pair et `I` ceux d'indice impair.

C5b. On suppose que N est une puissance de 2 de la forme $N = 2^q$. Les tableaux `P` et `I` renvoyés par la fonction `separe` ont donc eux aussi un nombre pair d'éléments et on peut faire sur eux la même opération.
Écrire une fonction **récursive** `TFR` renvoyant la transformée de Fourier d'un tableau `T` donné en argument en utilisant les transformées de Fourier $\hat{\texttt{P}}$ et $\hat{\texttt{I}}$ de `P` et `I` respectivement, ainsi que la fonction `omega` définie précédemment.

C5c. On note $C(q)$ le nombre d'appels récursifs nécessaires au calcul de la transformée de Fourier rapide d'une liste de 2^q éléments avec l'algorithme ci-dessus.
(a) Déterminer une relation de récurrence vérifiée par $C(q)$.
(b) En déduire $C(q)$ en fonction de q, puis en fonction de N.

C5d. Laquelle des deux fonctions `TF` ou `TFR` vous semble la plus efficace ? Justifier.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

C / Spectre d'un instrument de musique

C1. Quelle est la différence entre le spectre d'un son créé par un instrument de musique (une flûte par exemple) et le spectre d'un bruit ? On rappelle qu'un bruit est un signal où toutes les fréquences sont présentes.
Expliquer pourquoi on peut utiliser les résultats des ondes harmoniques (sous-partie B) pour l'étude des sons des instruments.

C2a. Mesurer la fréquence de la note et sa période en précisant comment il faut procéder, notamment en complétant les figures ci-dessous. Les résultats sont-ils compatibles entre les deux figures ?

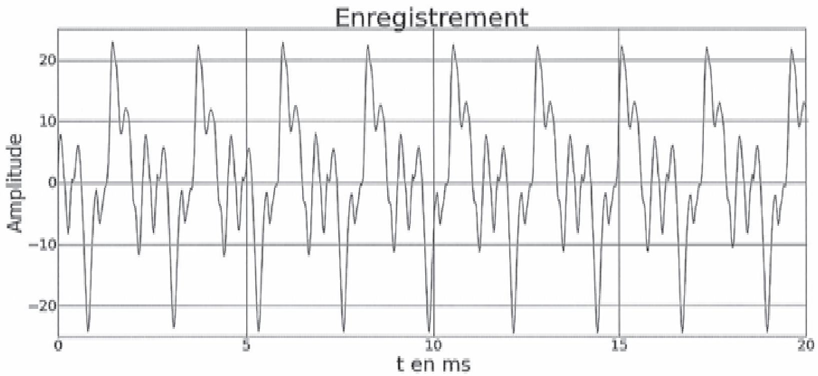

Figure 2.a - Enregistrement d'un son émis par un violon
(l'amplitude est graduée en unité arbitraire)

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

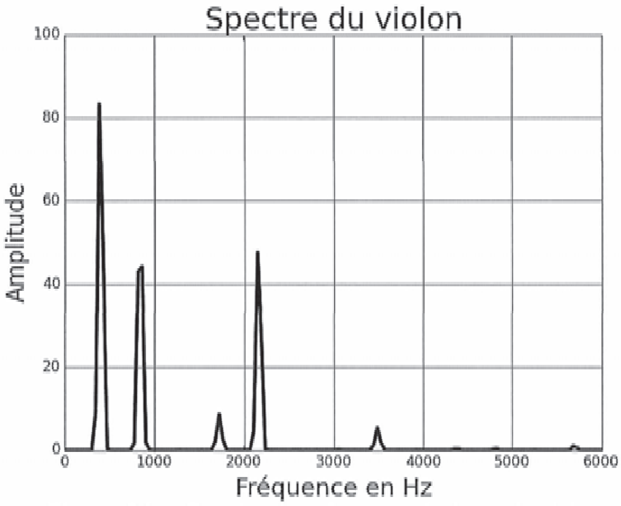

Figure 2.b – Spectre du même son émis par le violon
(l'amplitude est graduée en unité arbitraire)

C2b. Attribuer à chaque spectre (1 et 2) son instrument (flûte (a) ou harmonium (b)) en justifiant ce choix.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

C3a. Quel critère doit respecter la fréquence d'échantillonnage f_e ?
Quel est le nom du phénomène qui apparaitrait dans le cas d'un mauvais choix de f_e.
Proposer une fréquence d'échantillonnage f_e sachant que les fréquences audibles vont de 20 Hz à 20 kHz. Justifier.

C3b. Citer une situation dans laquelle le critère de la question C3a n'est pas vérifié.
Comment procéder expérimentalement pour éviter le phénomène gênant décrit ci-dessus ?

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

C4a. Écrire une fonction `omega` prenant comme argument deux entiers `a` et `N` et renvoyant le nombre complexe $exp\left(-\frac{2ja\pi}{N}\right)$.

C4b. En déduire une fonction `TF` renvoyant la transformée de Fourier d'un tableau `T` donné en argument.

C4c. Déterminer la complexité de `TF` dont l'entrée est un tableau de *N* éléments. On donnera la réponse en $\Theta(f(N))$.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

C5. Transformée de Fourier rapide

C5a. Écrire une fonction `separe`, qui étant donné un tableau `T` donné en argument, renvoie un couple de tableaux `(P,I)` où `P` est constitué des éléments de `T` d'indice pair et `I` ceux d'indice impair.

C5b. Écrire une fonction **récursive** `TFR` renvoyant la transformée de Fourier d'un tableau `T` donné en argument en utilisant les transformées de Fourier $\hat{P}$ et $\hat{I}$ de `P` et `I` respectivement, ainsi que la fonction `omega` définie précédemment.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

C5c. **(a)** Déterminer une relation de récurrence vérifiée par $C(q)$.
(b) En déduire $C(q)$ en fonction de q, puis en fonction de N.

Laquelle des deux fonctions `TF` ou `TFR` vous semble la plus efficace ? Justifier.