Centrale 2016 - PSI 2
un corrigé

1 Transformation de Fourier

1.A φ est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{-1/2,1/2\}$ et en $\pm 1/2$, elle admet des limites finies à droite et gauche. C'est donc une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. Les seuls problèmes d'intégrabilité sont aux voisinages des infinis où φ est nulle et donc intégrable. Finalement

$$\varphi \in E_{cpm}$$

On a immédiatement

$$\forall x\in\mathbb{R}^*,\ \mathcal{F}(\varphi)(x)=\int_{-1/2}^{1/2} e^{-2i\pi xt}\,dt=\left[-\frac{1}{2i\pi x}\right]_{-1/2}^{1/2}=-\frac{1}{2i\pi x}(e^{-i\pi x}-e^{i\pi x})=\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

De plus

$$\mathcal{F}(\varphi)(0)=\int_{-1/2}^{1/2}\,dt=1$$

On remarque (puisque $\sin(u)\sim u$ au voisinage de 0) que $\mathcal{F}(\varphi)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

1.B

1.B.1 On sait que sin est DSE de rayon infini et en utilisant le DSE, on trouve que

$$\forall x\neq 0,\ \psi(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(\pi x)^{2n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-\pi^2)^n}{(2n+1)!}x^{2n}$$

La formule reste valable pour $x=0$. On a donc trouvé le DSE de ψ et montré que le rayon de convergence est infini.
La somme d'une série entière étant de classe C^∞ sur l'intervalle ouvert de convergence, on a donc

$$\psi\in C^\infty(\mathbb{R})$$

1.B.2 Soit $n\in\mathbb{N}$; sur $[n,n+1]$, $\frac{1}{x}\geq\frac{1}{n+1}$. On en déduit que

$$\int_n^{n+1}|\psi(x)|\,dx\geq\frac{1}{\pi(n+1)}\int_n^{n+1}|\sin(\pi x)|\,dx$$

$x\mapsto|\sin(\pi x)|$ étant 1-périodique, l'intégrale ci-dessus est égale à celle sur $[0,1]$ où la fonction est positive. On peut enlever les valeurs absolue et l'intégrale vaut $\int_0^1\cos(\pi x)\,dx=\frac{2}{\pi}$. Ainsi,

$$\int_n^{n+1}|\psi(x)|\,dx\geq\frac{2}{\pi^2(n+1)}$$

On en déduit que

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \int_0^n|\psi(x)|\,dx\geq\frac{2}{\pi^2}\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}\underset{n\to+\infty}{\to}+\infty$$

$c\mapsto\int_0^c|\psi(x)|\,dx$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et ce qui précède montre que cette fonction n'est pas bornée. Elle est donc de limite infinie en $+\infty$ et ψ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$. En particulier

$$\psi\notin E_{cpm}$$

1.C Il s'agit d'utiliser le théorème de continuité des intégrales à paramètres. Soit donc $f\in E_{cpm}$.

- $\forall x \in \mathbb{R},\ t \mapsto f(t)e^{-2i\pi xt}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
- $\forall t \in \mathbb{R},\ x \mapsto f(t)e^{-2i\pi xt}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- $\forall [-a,a] \subset \mathbb{R},\ \forall x \in [-a,a],\ \forall t \in \mathbb{R},\ |f(t)e^{-2i\pi xt}| = |f(t)|$. Le "majorant" est indépendant de x et intégrable sur $\mathbb{R}$.

Le théorème s'applique et donne

$$\mathcal{F}(f) \in C^0(\mathbb{R})$$

1.D Soit $f \in \mathcal{S}$.

1.D.1 Soit $n \in \mathbb{N}$. $x \mapsto x^n f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et les seuls problèmes d'intégrabilité sont aux voisinages des infinis. $x \mapsto x^{n+2}f(x)$ étant bornée sur $\mathbb{R}$, on a $x^n f(x) = O(1/x^2)$ au voisinage des infini ce qui nous donne l'intégrabilité voulue.

1.D.2 On veut maintenant utiliser le théorème de régularité des intégrales à paramètres.
- $\forall x \in \mathbb{R},\ t \mapsto f(t)e^{-2i\pi xt}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
- $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in \mathbb{R},\ x \mapsto f(t)e^{-2i\pi xt}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ de dérivée n-ième $x \mapsto (-2i\pi)^n t^n f(t)e^{-2i\pi xt}$.
- $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ t \mapsto (-2i\pi)^n t^n f(t)e^{-2i\pi xt}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall [-a,a] \subset \mathbb{R},\ \forall x \in [-a,a],\ \forall t \in \mathbb{R},\ |(-2i\pi)^n t^n f(t)e^{-2i\pi xt}|| = (2\pi)^n |t^n f(t)|$. Le "majorant" est indépendant de x et intégrable sur $\mathbb{R}$ (on vient de le voir).

Le théorème s'applique et donne $\mathcal{F}(f) \in C^\infty(\mathbb{R})$ avec

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ (\mathcal{F}(f))^{(n)}(x) = (-2i\pi)^n \int_{-\infty}^{+\infty} t^n f(t)e^{-2i\pi x}\ dt$$

1.E

1.E.1 θ est continue et $\theta(x)$ est négligeable devant toute puissance de x au voisinage des infinis par croissances comparées. En particulier pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \mapsto x^n\theta(x)$ est continue et de limite finie (et même nulle) en $\pm\infty$ et donc bornée. Ainsi

$$\theta \in \mathcal{S}$$

La question précédente donne la dérivabilité de $y = \mathcal{F}(\theta)$ avec

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y'(x) = (-2i\pi) \int_{-\infty}^{+\infty} te^{-\pi t^2}e^{-2i\pi xt}\ dt$$

On a alors

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y'(x) + 2\pi xy(x) = i \int_{-\infty}^{+\infty} (-2\pi t - 2i\pi x)e^{-\pi t^2 - 2i\pi xt}\ dt$$

La fonction (de t) sous l'intégrale est la dérivée de $t \mapsto e^{-\pi t^2 - 2i\pi xt}$ dont la limite en $\pm\infty$ est nulle (son module vaut $\theta(t)$). L'intégrale est donc nulle et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y'(x) + 2\pi xy(x) = 0$$

1.E.2 On résout cette équation différentielle linéaire d"ordre 1. Il existe une constante c telle que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = ce^{-\pi x^2}$$

Avec l'intégrale donnée dans l'énoncé, on sait que $y(0) = 1$ et donc que $c = 1$. On a ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = e^{-\pi x^2}$$

ce qui s'écrit, en revenant aux notations de l'énoncé,

$$\mathcal{F}(\theta) = \theta$$

2 Cas de fonctions périodiques

2.A

2.A.1 Par théorèmes généraux, g est de classe C^∞ sur $]-1,1[\backslash\{0\}$ (quotient de deux telles fonctions avec le dénominateur qui ne s'annule pas). De plus

$$\forall x \in]-1,1[\backslash\{0\},\ g(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x}\frac{x}{\sin(\pi x)} \sim_0 \frac{1}{\pi}\frac{f(x)-f(0)}{x} \underset{x\to 0}{\to} \frac{f'(0)}{\pi} = g(0)$$

ce qui montre que g est continue en 0.

2.A.2 On a

$$\forall x \in]-1,1[\backslash\{0\},\ g'(x) = \frac{f'(x)\sin(\pi x) - \pi\cos(\pi x)(f(x)-f(0))}{\sin^2(\pi x)}$$

Par formule de Taylor-Young, $f'(x) = f'(0) + xf''(0) + o(x)$ et $f(x) - f(0) = xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(0) + o(x^2)$ (au voisinage de 0). En utilisant en outre $\sin(\pi x) = \pi x + o(x^2)$ et $\cos(\pi x) = 1 + o(x)$, on trouve alors

$$f'(x)\sin(\pi x) - \pi\cos(\pi x)(f(x)-f(0)) = \frac{\pi f''(0)}{2}x^2 + o(x^2)$$

Comme $\sin^2(\pi x) \sim \pi^2 x^2$, on trouve que

$$\lim_{x\to 0} g'(x) = \frac{f''(0)}{2\pi}$$

On est alors (avec la question précédente) dans le cadre d'utilisation du théorème de la limite de la dérivée qui nous apprend que g est dérivable en 0 avec $g'(0) = \frac{f''(0)}{2\pi}$ et que g' est continue en 0. On a ainsi

$$g \in C^1(]-1,1[) \text{ et } g'(0) = \frac{f''(0)}{2\pi}$$

2.B Si $k \neq 0$, une primitive de $x \mapsto e^{2i\pi kx}$ est $x \mapsto \frac{1}{2i\pi k}e^{2i\pi kx}$. Cette primitive étant 1 périodique, l'intégrale de $e^{2i\pi kx}$ est nulle sur un intervalle de longueur 1. On a alors, par linéarité du passage à l'intégrale,

$$\int_{-1/2}^{1/2} S_n(x)\ dx = \int_{-1/2}^{1/2} dx = 1$$

2.C On remarque que

$$S_n(x) = \mathrm{Im}\left(\sum_{k=-n}^{n} (e^{2i\pi x})^k\right)$$

Pour $x \in [-1/2, 1/2] \setminus \{0\}$ on a une somme géométrique de raison $e^{2i\pi x} \neq 1$ et (factorisation par la demi-somme des angles et formule d'Euler)

$$S_n(x) = \mathrm{Im}\left(\frac{e^{-2i\pi nx} - e^{2i\pi(n+1)x}}{1-e^{2i\pi x}}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{-2i\sin((2n+1)\pi x)}{-2i\sin(\pi x)}\right) = \frac{\sin((2n+1)\pi x)}{\sin(\pi x)}$$

2.D Par linéarité du passage à l'intégrale, on a

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k(f) = \int_{-1/2}^{1/2} f(x)\sum_{k=-n}^{n} e^{-2i\pi kx}\ dx = \int_{-1/2}^{1/2} f(x)S_n(-x)\ dx = \int_{-1/2}^{1/2} f(x)\frac{\sin((2n+1)\pi x)}{\sin(\pi x)}\ dx$$

Avec la définition de g, ceci donne

$$\begin{aligned}\sum_{k=-n}^{n} c_k(f) &= \int_{-1/2}^{1/2}\left(g(x)+\frac{f(0)}{\sin(\pi x)}\right)\sin((2n+1)\pi x)\,dx\\ &= \int_{-1/2}^{1/2} g(x)\sin((2n+1)\pi x)\,dx + f(0)\int_{-1/2}^{1/2} S_n(x)\,dx\\ &= \int_{-1/2}^{1/2} g(x)\sin((2n+1)\pi x)\,dx + f(0)\end{aligned}$$

2.E g étant de classe C^1 sur $[-1/2,1/2]$, on peut intégrer par parties :

$$\int_{-1/2}^{1/2} g(x)\sin((2n+1)\pi x)\,dx = \left[-\frac{\cos((2n+1)\pi x)}{(2n+1)\pi}g(x)\right]_{-1/2}^{1/2} + \frac{1}{(2n+1)\pi}\int_{-1/2}^{1/2} g'(x)\cos((2n+1)\pi x)\,dx$$

Avec le cosinus, le terme "tout intégré" est nul. g' étant continue sur le segment $[-1/2,1/2]$, on peut alors majorer grossièrement :

$$\left|\int_{-1/2}^{1/2} g(x)\sin((2n+1)\pi x)\,dx\right| \le \frac{\|g'\|_{\infty,[-1/2,1/2]}}{(2n+1)\pi} = \frac{C}{2n+1} \quad \text{avec} \quad C = \frac{\|g'\|_{\infty,[-1/2,1/2]}}{\pi}$$

2.F Fixons x et t dans $[-1/2,1/2]$. Par égalité des accroissements finis, il existe $c_{x,t}\in[t,x+t]$ tel que $f(x+t)-f(t) = xf'(c_{x,t})$. On peut alors écrire que

$$G_t(x) = (f'(x+t)-f'(c_{x,t}))\sin(\pi x) + f'(c_{x,t})(\sin(\pi x) - x\pi\cos(\pi x))$$

Remarquons que chaque dérivée de f est bornée sur $\mathbb{R}$ puisque continue et périodique.

- Par inégalité des accroissements finis, on a

$$|f'(x+t)-f'(c_{x,t})| \le |x+t-c_{x,t}|\|f''\|_\infty \le |x|\|f''\|_\infty$$

- De même

$$|\sin(\pi x)| = |\sin(\pi x)-\sin(0)\| \le |\pi x|$$

- $\|f'(c_{x,t})| \le \|f'\|_\infty$.
- $\sin(\pi x) - x\pi\cos(\pi x) = (\pi x + o(x^2)) - x\pi(1+o(x)) = o(x^2)$. $\frac{\sin(\pi x)-x\pi\cos(\pi x)}{x^2}$ est donc prolongeable par continuité en 0 et est bornée sur le segment $[-1/2,1/2]$;

$$\exists\, c/\ \forall x\in[-1/2,1/2],\ |\sin(\pi x)-x\pi\cos(\pi x)| \le cx^2$$

On en déduit que

$$|G_t(x)| \le (\pi\|f''\|_\infty + c\|f'\|_\infty)x^2 = Dx^2$$

D étant indépendante de x et t.

2.G Fixons $t\in[-1/2,1/2]$. La fonction $h_t\ :\ x\mapsto f(x+t)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et 2π périodique et on peut lui appliquer la question 2.D. En posant $g_t(x) = \frac{h_t(x)-h_t(0)}{\sin(\pi x)}$ pour $x\in]-1,1[\setminus\{0\}$, $g_t(0) = \frac{h_t'(0)}{\pi}$ et $g_t(1) = g_t(-1) = -g_t(0)$ on a alors

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k(h_t) = h_t(0) + \int_{-1/2}^{1/2} g_t(x)\sin((2n+1)\pi x)\,dx$$

Compte-tenu de l'expression de h_t, on a (changement de variable affine $u = x+t$)

$$c_n(h_t) = \int_{-1/2}^{1/2} f(x+t)e^{-2\pi inx}\,dx = e^{2\pi int}\int_{t-1/2}^{t+1/2} f(u)e^{-2\pi inu}\,du$$

Comme l'intégrale d'une fonction périodique est la même sur tout segment de longueur la période, on trouve que $c_n(h_t) = e^{2\pi int}c_n(f)$ et ainsi

$$f(t) - \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{2i\pi kt} = -\int_{-1/2}^{1/2} g_t(x)\sin((2n+1)\pi x)\,dx$$

Avec la question 2.E, on trouve alors que

$$\left|f(t) - \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{2i\pi kt}\right| \leq \frac{\|g_t'\|_{\infty,[-1/2,1/2]}}{\pi}\frac{1}{2n+1}$$

Remarquons maintenant qu'avec la question précédente,

$$|g_t'(x)| = \frac{|G_t(x)|}{\sin^2(\pi x)} \leq D\frac{x^2}{\sin^2(\pi x)}$$

$x \mapsto \frac{x^2}{\sin^2(\pi x)}$ est continue sur $[-1/2, 1/2] \setminus \{0\}$ et prolongeable par continuité en 0 (valeur $1/\pi^2$). C'est donc une fonction bornée sur le segment. Notons M sa norme infinie. On a alors $\|g'\|_{\infty,[-1/2,1/2]} \leq M$ et enfin

$$\left|f(t) - \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{2i\pi kt}\right| \leq \frac{DM}{\pi}\frac{1}{2n+1} = \frac{E}{2n+1}$$

où E est une constante (indépendante de x et t).

3 Formule d'échantillonage de Shannon

3.A $\mathcal{F}(f)$ étant nulle hors de $[-1/2, 1/2]$, ses dérivées à tout ordre à droite en $1/2$ et à gauche en $-1/2$ sont nulles. Comme c'est une fonction C^∞, on a donc

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (\mathcal{F}(f))^{(n)}\left(\frac{1}{2}\right) = (\mathcal{F}(f))^{(n)}\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$$

3.B h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ en tout point de l'ouvert $]-1/2, 1/2[$ (si x_0 est dans cet ouvert, il existe un voisinage de x_0 sur leque $h = \mathcal{F}(f)$ qui est C^∞). Par périodicité, elle est indéfiniment en tout point hors de $1/2 + \mathbb{Z}$.
Par périodicité, il suffit de montrer que h est indéfiniment dérivable à gauche en $1/2$ et à droite en $-1/2$ avec égalité des dérivées à tout ordre à droite et gauche en $-1/2$ et $1/2$. C'est ce que l'on a fait en question précédente.

3.C On peut ainsi appliquer l'identité (2.1) à h. En posant $d_k = c_k(h)$, on trouve que

$$\left\|h - \sum_{k=-n}^{n} d_k e_k\right\|_{\infty,[-1/2,1/2]} \leq \frac{E}{2n+1} \quad \text{avec} \quad e_k\ :\ t \mapsto e^{2ik\pi t}$$

ce qui prouve la convergence uniforme voulue sur $[-1/2, 1/2]$ (où h coïncide avec $\mathcal{F}(f)$).

3.D Si $x \notin k$, on a $\int_{-1/2}^{1/2} e^{2i\pi(x+k)\xi}\,d\xi = \frac{1}{2i\pi(x+k)}(e^{i\pi(x+k)} - e^{-i\pi(x+k)}) = \psi(x+k) = \psi_k(x)$. Ceci reste vrai pour $x = k$ (l'égalité se lit).
La formule (2.1) donne

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \int_{-1/2}^{1/2} h(\xi)e^{2i\pi x\xi}\,d\xi$$

et on a donc

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) - \sum_{k=-n}^{n} d_k \psi_k(x) = \int_{-1/2}^{1/2} \left(h(\xi) - \sum_{k=-n}^{n} d_k e^{2i\pi k\xi} \right) e^{2i\pi x\xi}\ d\xi$$

Une majoration grossière donne (l'exponentielle complexe est de module 1 et on intègre sur un intervalle de longueur 1)

$$\left\| f - \sum_{k=-n}^{n} d_k \psi_k \right\|_{\infty,\mathbb{R}} \leq \left\| h - \sum_{k=-n}^{n} d_k e_k \right\|_{\infty,[-1/2,1/2]}$$

et on a la convergence uniforme voulue.

3.E La convergence uniforme entraînant la convergence simple, on a

$$\forall j \in \mathbb{Z},\ f(-j) = \sum_{k=-n}^{n} d_k \psi_k(-j) = d_j$$

puisque $\psi_k(-j) = \psi(k-j)$ vaut 1 si $k = j$ et est nul sinon.

C / Spectre d'un instrument de musique

C1.
Le son créé par un instrument de musique, s'il est continu (note tenue et sans tenir compte de l'attaque du son) est périodique et son spectre est discret (fondamental + harmoniques de fréquences multiples de celle du fondamental).
Un bruit qui contient toutes les fréquences possède un spectre continu.
L'analyse de Fourier permet de décomposer le son d'un instrument en somme de sons harmoniques de fréquences présentes dans son spectre.

C2a.
La mesure sur la figure 2a de 8 périodes de la courbe nous permet d'écrire $8T_0 = 18\,\mathrm{ms}$, soit

$\boxed{T_0 = 2{,}2\,\mathrm{ms}}$ et donc $\boxed{f_0 = 0{,}44\,\mathrm{kHz}}$.
L'étude du spectre de la figure 2b nous donne un fondamental (fréquence la plus basse du spectre) à $\boxed{f_0 \approx 0{,}45\,\mathrm{kHz}}$, ce qui est cohérent avec l'analyse de la courbe 2a.

C2b.
Le spectre 2 contient deux pics (le fondamental et un harmonique) et correspond donc à un signal temporel proche d'une sinusoïde. Il s'agit donc de l'enregistrement (a), c'est à dire la flûte. Au contraire le spectre 1 contient de nombreux harmoniques et correspond à un signal temporel ne ressemblant as du tout à un signal sinusoïdal : il s'agit de l'enregistrement (b) (harmonium).

C3a.
La fréquence d'échantillonnage f_e doit vérifier l'inégalité suivante, avec $f_{\max}$, fréquence maximale présente dans le signal : $\boxed{f_e > 2f_{\max}}$. C'est le critère de Shannon-Nyquist.
Dans le cas d'un mauvais choix de f_e on observe le phénomène de repliement spectral.
Dans le cas où $f_{\max} = 20\,\mathrm{kHz}$, on choisira $\boxed{f_e = 44\,\mathrm{kHz}}$ par exemple (cas du CD audio).

C3b.
Dans le cas de l'enregistrement du signal de l'harmonium précédent où est présente une fréquence d'harmonique $f = 4{,}4\,\mathrm{kHz}$, le choix d'une fréquence d'échantillonnage $f_e = 6{,}0\,\mathrm{kHz}$ par exemple entraînerait un repliement de l'harmonique correspondant à $f_e - f = 1{,}6\,\mathrm{kHz}$ qui sera parfaitement audible et détériorera le signal. Pour éviter cela on utilise un filtre anti-repliement (un filtre passe-bas qui élimine du signal les fréquences supérieures à $\frac{f_e}{2}$).

C4a.
La fonction demandée prend deux arguments et renvoie directement le nombre complexe demandé utilisant la fonction exp de la bibliothèque numpy :

```
def omega(a, N):
  return np.exp(-2j*a*np.pi/N)
```

C4b.

```
def TF(tab):
  N = len(tab) # nécessité de calculer la longueur de la liste (utilisée dans les boucles)
  trans = [] # initialisation de la liste qui contiendra la TF
  for i in range(N): # boucle pour le calcul de chaque terme de la TF
    s = 0 # initialisation de la somme pour le i-ème élément de la TF
    for j in range(N): # boucle pour le calcul de la somme correspondant au i-ème terme
      s+= tab[j]*omega(i*j,N) # ajout du j-ème terme de la somme
    trans.append(s) # ajout de la somme comme i-ème élément de la TF
  return trans
```

C4c.
La fonction TF comporte deux boucles imbriquées comportant chacune N itérations : Il s'agit donc d'une complexité en $\boxed{\Theta(N^2)}$.

C5a.
Le code demandé est le suivant :

```python
def separe(T):
  pair = True # Drapeau booléen qui commutera à chaque changement d'indice
          # On commence par l'indice 0 qui est pair
  P = [] # initialisation des deux listes d'indices pair/impair
  I = []
  for i in T:
    if pair:
      P.append(i) # remplissage de la liste des indices pairs
    else:
      I.append(i) # remplissage de la liste des indices impairs
    pair = not pair # commutation du drapeau
  return P, I
```

C5b.

```python
def TFR(T):
  N = len(T) # calcul une bonne fois pour toutes de la longueur de la liste à traiter
  p = N // 2 # calcul de la longueur des deux sous-listes
  if N == 1:
    return T # condition d'arrêt des appels récursifs
          # la TF d'une liste de 1 élément est elle-même
          # l'appel à la fonction se termine alors
          # mais si N > 1 l'appel continue :
  P, I = separe(T) # on sépare la liste en deux sous-listes
  TFP = TFR(P) # calcul récursif de la TF de P
  TFI = TFR(I) # calcul récursif de la TF de I
  # on peut maintenant déduire la TF de T des deux TF précédentes
  # création d'une liste vide qui contiendra la TF de T
  TFT = []
  for k in range(p): # calcul de la première moitié de la TF de T
    # la boucle commence à k=0 et termine à k=p-1
    TFT.append(TFP[k] + omega(k, N)*TFI[k]) # ajout du k-ème élément
  for k in range(p, N): # calcul de la deuxième moitié de la TF de T
    # la boucle commence à k=p et termine à k=N-1
    TFT.append(TFP[k-p] + omega(k, N)*TFI[k-p]) # ajout du k-ème élément
  return TFT # on n'oublie pas de renvoyer le résultat de la TF
```

C5c.
(a) Dans le cas où $N > 1$, chaque appel à la fonction TFR engendre 2 appels récursifs supplémentaires nécessaires aux calculs de TFP et de TFI. Il faut aussi tenir compte de tous les appels récursifs inclus dans les calculs de TFP et TFI.
On peut donc en déduire immédiatement que $\boxed{C(q) = 2C(q-1) + 2}$ si $q > 0$. On a par ailleurs $C(0) = 0$ (condition d'arrêt vérifiée dans la fonction qui ne fait donc aucun appel récursif).

(b) Il s'agit d'une suite arithmético-géométrique de la forme $u_{n+1} = au_n + b$ avec $a = 2$, $b = 2$ et $u_0 = 0$.
Le terme général d'une telle suite est $u_n = a^n(u_0 - r) + r$ avec $r = \dfrac{b}{1-a}$ et celui de $C(q)$ est donc $\boxed{C(q) = 2^{q+1} - 2}$.
Or, d'après la relation $N = 2^q$ on en déduit : $\boxed{C(q) = 2(N-1)}$.

C5d.

Le calcul de la complexité de `TFR` n'est pas immédiat du tout (et ne se déduit pas de C(q)!) puisque chaque appel récursif contient une boucle de longueur variable égale à la longueur de la liste passée en paramètre de la fonction. Le premier appel (non récursif) de la fonction se fait avec une liste de longueur N, les deux appels suivants avec des listes de longueurs $N/2$, les 4 appels suivants avec $N/4$, et ce jusqu'à la condition d'arrêt (liste de longueur 1). Le dernier appel récursif conduisant aux boucles « for » se fait avec des listes de longueur 2.

Soit $D(q)$ le nombre d'itérations total des boucles « for ». On peut écrire $D(q) = N + 2 \times \dfrac{N}{2} + 4 \times \dfrac{N}{4} + ... + 2^{q-1} \times \dfrac{N}{2^{q-1}}$, soit encore $D(q) = \sum_{k=0}^{q-1} 2^k \times \dfrac{N}{2^k}$, c'est à dire $D(q) = \sum_{k=0}^{q-1} N$ et donc $D(q) = qN$, soit finalement avec $q = \dfrac{\ln N}{\ln 2}$, $\boxed{D(q) = \dfrac{N \ln N}{\ln 2}}$.

La complexité de `TFR` est donc en $\boxed{\Theta(N \ln N)}$.

Pour les grandes valeurs de N, la fonction `TFR` est bien plus efficace que la fonction `TF`.