Exercice

On rappelle que pour deux entiers naturels r et ℓ, $\binom{r}{\ell}$ désigne le nombre de parties à ℓ éléments d'un ensemble à r éléments.

Soient n un entier naturel non nul et X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et prenant leurs valeurs dans $[\![1, n+1]\!]$.

On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall (i,j) \in [\![1, n+1]\!]^2, \quad \mathbb{P}([X=i] \cap [Y=j]) = \alpha \binom{n}{i-1} \binom{n}{j-1}$$

1. Montrer de deux manières différentes que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

2. Déterminer la valeur du réel α.

3. Donner les lois des variables aléatoires X et Y. Ces deux variables aléatoires sont-elles indépendantes ?

4. Reconnaître la loi de la variable aléatoire $Z = X - 1$. Donner alors l'espérance et la variance de X.

5. Soient p, q et r trois entiers naturels et A un ensemble fini de cardinal $p + q$.

En **dénombrant de deux façons différentes** les parties de A de cardinal r, montrer que l'on a :

$$\sum_{k=0}^{r} \binom{p}{k} \binom{q}{r-k} = \binom{p+q}{r}$$

On pourra remarquer que $k + (r - k) = r$ et s'aider d'un schéma illustrant cette situation.

6. En déduire la valeur de : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$

7. On note $B \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ la matrice dont le coefficient de la ligne i et de la colonne j est : $b_{ij} = \mathbb{P}([(X,Y) = (i,j)])$.

7.1. Déterminer le rang de la matrice B.

7.2. Déterminer la valeur de $\mathbf{tr}(B)$, la trace de la matrice B.

PROBLÈME

Présentation générale

L'objet de ce problème est l'étude du phénomène de Gibbs. Dans la première partie, on démontre des lemmes de Riemann-Lebesgue. Dans la deuxième, on calcule l'intégrale de Dirichlet. Enfin, dans la troisième partie, on met en évidence le phénomène de Gibbs.

Notations

– $\mathbf{R}$ désigne l'ensemble des réels, $\mathbf{R}^+$ désigne l'intervalle $[0, +\infty[$ et $\mathbf{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes.

Partie I - Résultats préliminaires

Dans ce qui suit, $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ désigne une fonction continue 2π-périodique telle que :

$$\int_0^{2\pi} \varphi(t)\, dt = 0.$$

Q10. Si $f : [0, 2\pi] \to \mathbf{C}$ est une fonction de classe C^1, montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\ dt = 0.$$

Q11. Montrer que la primitive de φ s'annulant en 0 est 2π-périodique et bornée sur $\mathbf{R}$.

Soient a et b deux réels tels que $a < b$, déduire de ce qui précède que pour toute fonction f de classe C^1 sur $[a, b]$ et à valeurs dans $\mathbf{C}$ on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\,\varphi(nt)\, dt = 0.$$

Q12. Soient α et β deux réels tels que $\alpha < \beta$ et $h : [\alpha,\beta] \to \mathbf{C}$ une fonction continue. Soient ε un réel strictement positif et g une fonction de classe C^1 sur $[\alpha,\beta]$ telle que $\sup\limits_{[\alpha,\beta]} |h - g| \leq \varepsilon$, montrer qu'il existe une constante M ne dépendant que de φ telle que :

$$\left|\int_\alpha^\beta h(t)\,\varphi(nt)\, dt\right| \leq M\,|\beta - \alpha|\,\varepsilon + \left|\int_\alpha^\beta g(t)\,\varphi(nt)\, dt\right|.$$

En déduire que pour tout intervalle $[a, b]$ de $\mathbf{R}$ et toute fonction $f : [a, b] \to \mathbf{C}$ continue par morceaux :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\,\varphi(nt)\,dt = 0.$$

On pourra admettre et utiliser le théorème de Weierstrass qui affirme que pour tout segment $[\alpha, \beta]$ avec $\alpha < \beta$ et toute fonction continue $f : [\alpha, \beta] \to \mathbf{C}$, il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de fonctions polynomiales qui converge uniformément vers f sur $[\alpha, \beta]$.

Q13. Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbf{C}$ une fonction continue par morceaux. Déduire de ce qui précède que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\sin^2(nt)\,dt = \frac{1}{2}\int_a^b f(t)\,dt.$$

Partie II - L'intégrale de Dirichlet

Soit $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{C}$ une fonction continue telle que la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ soit bornée.

Q14. Montrer que, pour tout réel $a > 0$, les intégrales généralisées $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{F(t)}{t^2}dt$ puis $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{f(t)}{t}dt$ sont convergentes et que :

$$\int_a^{+\infty} \frac{f(t)}{t}dt = \int_a^{+\infty} \frac{F(t)}{t^2}dt - \frac{F(a)}{a}.$$

Q15. Montrer que les intégrales généralisées $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}dt$ sont convergentes et que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}dt.$$

Dans ce qui suit, on considère une fonction continue $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{C}$ telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ soit absolument convergente.

Q16. Montrer que la fonction

$$\mathcal{L}(f) : x \in \mathbf{R}^+ \mapsto \int_0^{+\infty} f(t)\,e^{-xt}dt$$

est bien définie et continue sur $\mathbf{R}^+$.

Q17. On suppose de plus que la fonction f est bornée. Montrer que la fonction $\mathcal{L}(f)$ est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$ et que $\mathcal{L}(f)(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

Q18. Soit $f : t \in \mathbf{R}^+ \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$.

1 . Montrer que la fonction $\mathcal{L}(f)$ est solution de l'équation différentielle

$$y'' + y = \frac{1}{x} \qquad \textbf{(E)}$$

sur $]0, +\infty[$.

2 . On cherche une solution particulière de (**E**) de la forme $x \mapsto \alpha(x)\cos(x) + \beta(x)\sin(x)$ où les fonctions α et β sont de classe C^2 et vérifient :

$$\forall x \in]0, +\infty[\quad \alpha'(x)\cos(x) + \beta'(x)\sin(x) = 0.$$

Montrer que l'on peut prendre $\alpha(x) = \int_x^{+\infty} f_1(t)\,dt$ et $\beta(x) = \int_x^{+\infty} f_2(t)\,dt$ où f_1 et f_2 sont des fonctions que l'on déterminera.

3 . En déduire que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\,dt$ est une solution de l'équation (**E**) sur $]0, +\infty[$.

4 . Montrer qu'il existe $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ tel que :

$$\forall x \in]0, +\infty[\quad \mathcal{L}(f)(x) = a\cos x + b\sin x + \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\,dt.$$

Q19. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\,dt$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ et en déduire que pour tout $x > 0$ on a :

$$\mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\,dt.$$

Q20. Montrer que $\int_1^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{x+t} - \frac{\sin(t)}{t}\right) dt$ tend vers 0 quand x tend vers 0^+. En déduire que :

$$\lim_{x\to 0^+} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt.$$

Q21. Déduire des questions précédentes que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt = \frac{\pi}{2}$.

Partie III - Phénomène de Gibbs

Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction 2π-périodique et impaire définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in]0, \pi[\\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \text{ ou } x = \pi \end{cases} . \qquad \textbf{(E.1)}$$

On désigne par $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite de fonctions définie par :

$$\forall n \in \mathbf{N},\ \forall x \in \mathbf{R},\ S_n(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{n} \frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1}.$$

Q22. En calculant la dérivée de S_n, montrer que :

$$\forall n \in \mathbf{N},\ \forall x \in [0, \pi],\ S_n(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^x \frac{\sin(2(n+1)t)}{\sin(t)}dt.$$

Q23. Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, on a :

$$\frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt.$$

En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

Q24. En déduire que $S_n\left(\frac{\pi}{2}\right)$ tend vers 1 quand n tend vers l'infini.

Q25. Calculer $S_n(\pi - x)$ en fonction de $S_n(x)$. En utilisant le résultat de la **question Q12**, montrer que, pour tout $x \in]0, \pi/2]$, on a :

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = 1.$$

Q26. Déduire de ce qui précède que la suite $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge simplement vers la fonction f définie par (**E.1**) sur **R**.

Q27. Montrer que la suite de fonctions $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ définie sur $[0, \pi]$ par

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2n} \dfrac{\sin(x)}{\sin\left(\frac{x}{2n}\right)} & \text{si} \quad x \in]0, \pi] \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

converge simplement sur $[0, \pi]$ vers la fonction φ définie sur $[0, \pi]$ par :

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & \text{si} \quad x \in]0, \pi] \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}.$$

Q28. Montrer que φ est continue sur $[0, \pi/2]$ et en déduire que

$$\lim_{n\to+\infty} S_n\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{x}dx$$

puis que :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(f\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right) - S_n\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right)\right) = \frac{2}{\pi}\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx.$$

Q29. Montrer que

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{x}dx = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}$$

puis que :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(S_n\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right) - f\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right)\right) = 2\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n}}{(2n+1)(2n+1)!} - 1.$$

Q30. Comparer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n}}{(2n+1)(2n+1)!} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{3} (-1)^n \frac{\pi^{2n}}{(2n+1)(2n+1)!},$$

et montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(S_n\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right) - f\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right)\right) > 0.17\ .$$

En déduire que la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ne converge pas uniformément vers f sur $]0, \pi/2[$.

FIN