Exercice

1. • Puisque $\binom{n}{k}$ est le nombre de parties à k éléments dans un ensemble à n éléments, la somme $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$ est égale au nombre total de parties d'un ensemble à n éléments, c'est-à-dire 2^n.

• Par la formule du binôme, $\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = \sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$.

2. Les événements $A_{i,j} = [X=i]\cap[Y=j]$, pour $(i,j)\in[\![1;n+1]\!]^2$, forment un système complet d'événements, donc $\sum\limits_{(i,j)\in[\![1;n+1]\!]^2}\mathbb{P}(A_{i,j}) = 1$.

Or par **1**, $\sum\limits_{(i,j)\in[\![1;n+1]\!]^2}\mathbb{P}(A_{i,j}) = \sum\limits_{i=1}^{n+1}\sum\limits_{j=1}^{n+1}\alpha\binom{n}{i-1}\binom{n}{j-1} = \alpha\sum\limits_{i=1}^{n+1}\binom{n}{i-1}\sum\limits_{j=1}^{n+1}\binom{n}{j-1} = \alpha 4^n$. Donc $\alpha = \frac{1}{4^n}$.

3. • Par formule des probabilités totales sur le système complet d'événements $([Y=j])_{j\in[\![1;n+1]\!]}$, on a :

$\forall\, i\in[\![1;n+1]\!],\ \mathbb{P}(X=i) = \sum\limits_{j=1}^{n+1}\mathbb{P}([X=i]\cap[Y=j]) = \frac{\binom{n}{i-1}}{4^n}\sum\limits_{j=1}^{n+1}\binom{n}{j-1} = \frac{\binom{n}{i-1}}{2^n}$.

• Par symétrie, $\forall\, j\in[\![1;n+1]\!],\ \mathbb{P}(Y=j) = \frac{\binom{n}{j-1}}{2^n}$.

• Ainsi $\forall\,(i,j)\in[\![1;n+1]\!]^2,\ \mathbb{P}([X=i]\cap[Y=j])\frac{\binom{n}{i-1}\binom{n}{j-1}}{4^n} = \mathbb{P}(X=i)\mathbb{P}Y=j)$.

Les variables X et Y sont donc indépendantes.

4. La variable $Z = X-1$ est à valeurs dans $[\![0;n]\!]$ et $\forall\, k\in[\![0;n]\!]$, $P(Z=k) = P(X=k+1) = \binom{n}{k}\frac{1}{2^k}$. Donc Z suit la loi binomiale de paramètres n et $p=\frac{1}{2}$. En particulier, $\mathbb{E}(Z) = \frac{n}{2}$ et $\mathbb{V}(Z) = \frac{n}{4}$.
On en déduit par linéarité de l'espérance que $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Z)+1 = \frac{n}{2}+1$, et par la formule donnant la variance d'une transformation affine que $\mathbb{V}(X) = \mathbb{V}(Z) = \frac{n}{4}$.

5. • Par définition des coefficients binomiaux, les parties de A de cardinal r sont au nombre de $\binom{p+q}{r}$.

• Partitionnons A en deux parties A_1 et A_2 de cardinal p et q respectivement.
Pour tout $k\in[\![0;r]\!]$, le nombre de parties de A de cardinal r et comportant exactement k éléments de A_1 (et donc $r-k$ éléments de A_2) est égal à $\binom{p}{k}\binom{q}{r-k}$, puisqu'il y a autant de telles parties que de couples constitués d'une partie de A_1 de cardinal k et d'une partie de A_2 de cardinal $r-k$.

Ainsi, la somme $\sum\limits_{k=0}^{r}\binom{p}{k}\binom{q}{r-k}$ est égale au nombre total de parties de A de cardinal r.

L'égalité demandée résulte de la comparaison des résultats des deux points précédents.

6. Le cas $p=q=r=n$ dans l'égalité de **5** donne $\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$, puisque $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

7.1. Les colonnes de la matrice B sont toutes non nulles et proportionnelles à la colonne des coefficients binomiaux $\binom{n}{i-1}$ pour $1\leqslant i\leqslant n+1$, donc $\mathrm{rg}(B) = 1$.

7.1. On a $\mathrm{Tr}(B) = \sum\limits_{i=1}^{n+1}\mathbb{P}([X=i]\cap[Y=i]) = \frac{1}{4^n}\sum_{i=1}^{n+1}\binom{n}{i-1}^2 = \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}$ par **6**.

Problème

Partie 1 : résultats préliminaires

10. Une intégration par partie (on dérive f et on primitive $\cos(nt)$ et on a bien deux fonctions de classe C^1 sur le segment)
$$\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\ dt = \left[\frac{\sin(nt)}{n} f(t)\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{2\pi} \sin(nt)f'(t)\ dt$$
Le terme entre crochets est nuls. On majore l'autre grossièrement :
$$\left|\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\ dt\right| \leq \frac{1}{n}\int_0^{2\pi} |f'(t)|\ dt$$
Le majorant étant de limite nulle,
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\ dt = 0$$

11. Par théorème fondamental appliqué à la fonction continue φ sur l'intervalle $\mathbb{R}$, la primitive cherchée est
$$\Phi\ :\ x \mapsto \int_0^x \varphi(t)\ dt$$
φ étant 2π-périodique, $\int_x^{x+2\pi} \varphi(t)\ dt$ ne dépend pas de x et par hypothèse, sa valeur en 0 est nulle. On en déduit que Φ est aussi 2π-périodique.
Comme Φ est continue, elle est bornée sur le segment $[0, 2\pi]$. Etant 2π-périodique, elle est aussi bornée sur $\mathbb{R}$ (avec la même borne que sur $[0, 2\pi]$).
On peut alors utiliser une intégration par partie comme plus haut.
$$\int_a^b f(t)\varphi(nt)\ dt = \left[\frac{1}{n} f(t)\Phi(nt)\right]_a^b - \frac{1}{n}\int_a^b f'(t)\Phi(nt)\ dt$$
En notant $M = \|\Phi\|_\infty$ (qui existe) on a alors
$$\left|\int_a^b f(t)\varphi(nt)\ dt\right| \leq \frac{M}{n}(|f(a)| + |f(b)|) + \frac{M}{n}\int_a^b |f'(t)|\ dt$$
Là encore le majorant est de limite nulle et
$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\varphi(nt)\ dt = 0$$

12. On a
$$\int_\alpha^\beta h(t)\varphi(nt)\,dt = \int_\alpha^\beta (h(t)-g(t))\varphi(nt)\,dt + \int_\alpha^\beta g(t)\varphi(nt)\,dt$$
On peut alors utiliser l'inégalité triangulaire et la croissance de l'intégrale
$$\left|\int_\alpha^\beta h(t)\varphi(nt)\,dt\right| \leq \int_\alpha^\beta |h(t)-g(t)|.|\varphi(nt)|\,dt + \left|\int_\alpha^\beta g(t)\varphi(nt)\,dt\right|$$
Comme $|h-g|$ est majorée par ε sur $[\alpha,\beta]$, on en déduit alors que
$$\left|\int_\alpha^\beta h(t)\varphi(nt)\,dt\right| \leq \|\Phi\|_\infty|\beta-\alpha|\varepsilon + \left|\int_\alpha^\beta g(t)\varphi(nt)\,dt\right|$$
Soit alors f continue sur $[a,b]$. On va montrer le résultat demandé en revenant à la définition des limites (comme nous y incite le début de la question). On se donne donc $\varepsilon > 0$. Par théorème de Weierstrass, on peut trouver une fonction polynomiale P telle que $\|f-P\|_{\infty,[a,b]} \leq \varepsilon$. La question précédente donne une constante M telle que
$$\left|\int_a^b f(t)\varphi(nt)\,dt\right| \leq M|b-a|\varepsilon + \left|\int_a^b P(t)\varphi(nt)\,dt\right|$$
La question 11 montre que pour n assez grand, le second terme est en module plus petit que ε pour n assez grand. C'est à dire qu'il existe n_0 tel que
$$\forall n \geq n_0,\ \left|\int_a^b f(t)\varphi(nt)\,dt\right| \leq (M|b-a|+1)\varepsilon$$
Comme $(M|b-a|+1)$ est une constante, on a donc prouvé que
$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(t)\varphi(nt)\,dt = 0$$
Dans le cas où f n'est que continue par morceaux, il existe un nombre fini de morceaux $]\alpha,\beta[$ tels que f restreinte à $]\alpha,\beta[$ soit continue et prolongeable en une fonction $\tilde{f}$ continue sur $[\alpha,\beta]$. On a
$$\lim_{n\to+\infty}\int_\alpha^\beta \tilde{f}(t)\varphi(nt)\,dt = 0$$
Remplacer $\tilde{f}$ par f ne change pas l'intégrale. On obtient le résultat pour f sur $[a,b]$ en faisant la somme sur tous les morceaux.

13. On a $\sin^2(nt) = \frac{1}{2}(1-\cos(2nt))$ et donc
$$\int_a^b f(t)\sin^2(nt)\,dt = \frac{1}{2}\int_a^b f(t)\,dt - \frac{1}{2}\int_a^b f(t)\cos(2nt)\,dt$$
Comme $x \mapsto \cos(2x)$ est continue, 2π-périodique et d'intégrale nulle sur $[0,2\pi]$, le second terme est de limite nulle avec ce qui précède et ainsi
$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(t)\sin^2(nt)\,dt = \frac{1}{2}\int_a^b f(t)\,dt$$

Partie 2 : l'intégrale de Dirichlet

14. $t \mapsto \frac{F(t)}{t}$ étant continue sur $[a, +\infty[$, le seul problème est celui au voisinage de $+\infty$. Comme F est bornée, on a $\frac{F(t)}{t^2} = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et par comparaison aux fonctions de Riemann, $t \mapsto \frac{F(t)}{t}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ et finalement sur $[a, +\infty[$. A fortiori, on a existence de
$$\int_a^{+\infty} \frac{F(t)}{t^2}\,dt$$
$t \mapsto \frac{f(t)}{t}$ est continue sur $[a, +\infty[$ et le seul problème est donc celui au voisinage de $+\infty$. On revient ici à la définition de l'existence de l'intégrale (et on ne cherche pas à prouver l'intégrabilité). Par intégration par parties (et comme F est une primitive de f sur $\mathbb{R}^+$ par théorème fondamental)
$$\int_a^b \frac{f(t)}{t}\,dt = \left[\frac{F(t)}{t}\right]_a^b + \int_a^b \frac{F(t)}{t^2}\,dt$$
Comme F est bornée, le terme entre crochets admet une limite (nulle) quand $b \to +\infty$. On a vu en début de question que la seconde intégrale admet aussi une limite quand $b \to +\infty$. On a donc (existence et valeur)
$$\int_a^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt = -\frac{F(a)}{a} + \int_a^{+\infty} \frac{F(t)}{t^2}\,dt$$

15. $t \mapsto \sin(t)/t$ est continue sur $]0, +\infty[$ et prolongeable par continuité en 0 (valeur 1). Le seul problème est au voisinage de $+\infty$. Comme $x \mapsto \int_0^x \sin(t)\,dt = 1 - \cos(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}^+$, on peut utiliser la question précédente pour justifier que l'intégrale existe au voisinage de ∞ et donc sur $\mathbb{R}^+$.
Comme $t \mapsto 1 - \cos(t)$ est une primitive de sin sur $\mathbb{R}^+$, une intégration par partie (on travaille sur un segment de $\mathbb{R}^{+*}$ où il n'y a pas de problème pour celle-ci) donne
$$\forall [a, b] \subset \mathbb{R}^{+*},\ \int_a^b \frac{\sin(t)}{t}\,dt = \left[\frac{1 - \cos(t)}{t}\right]_a^b + \int_a^b \frac{1 - \cos(t)}{t^2}\,dt$$
Comme $1 - \cos(t) = 2\sin^2(t)$, on a donc
$$\forall [a, b] \subset \mathbb{R}^{+*},\ \int_a^b \frac{\sin(t)}{t}\,dt = \left[\frac{1 - \cos(t)}{t}\right]_a^b + 2\int_a^b \frac{\sin^2(t/2)}{t^2}\,dt$$
Dans l'intégrale, on pose $u = t/2$ (changement de variable affine), on a alors
$$\forall [a, b] \subset \mathbb{R}^{+*},\ \int_a^b \frac{\sin(t)}{t}\,dt = \left[\frac{1 - \cos(t)}{t}\right]_a^b + 2\int_{a/2}^{b/2} \frac{\sin^2(u)}{u^2}\,du$$
Le membre de gauche admet une limite quand $a \to 0$ et quand $b \to +\infty$. Il en va de même du crochet (de limite nulle, en particulier car $1 - \cos(t) \sim t^2/2$ au voisinage de 0) et en passant à la limite, on obtient l'existence de l'intégrale de $\sin^2(u)/u^2$ sur $\mathbb{R}^+$ avec
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}\,dt$$

16. On utilise le résultat de continuité des intégrales à paramètres.
   - $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ t \mapsto f(t)e^{-xt}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.
   - $\forall t \in \mathbb{R}^+,\ x \mapsto f(t)e^{-xt}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.
   - $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \forall t \in \mathbb{R}^+,\ |f(t)e^{-xt}| \leq |f(t)|$. Le majorant est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Le théorème s'applique et indique que $\mathcal{L}(f)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

17. On doit maintenant utiliser le théorème de régularité.
   - $\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ t \mapsto f(t)e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
   - $\forall t \in \mathbb{R}^+,\ x \mapsto f(t)e^{-xt}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}$ de dérivée k-ième $x \mapsto (-t)^k f(t)e^{-xt}$.
   - $\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ t \mapsto (-t)^k f(t)e^{-xt}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.
   - $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall [a,b] \subset \mathbb{R}^{+*},\ \forall x \in [a,b],\ \forall t \in \mathbb{R}^+,\ |(-t)^k f(t)e^{-xt}| \le |f(t)|t^k e^{-at}$. $t \mapsto t^k e^{-at}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, de limite nulle en $+\infty$ (car $a > 0$) et donc bornée sur $\mathbb{R}^+$. Le majorant est donc intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (puisque continu sur $\mathbb{R}^+$ et $O(f(t))$ au voisinage de $+\infty$, on n'a donc pas besoin du caractère borné de f).

   Le théorème s'applique et indique que $\mathcal{L}(f)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}$ avec

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{L}(f)^{(k)}\ :\ x \mapsto \int_0^{+\infty} (-t)^k f(t)e^{-xt}\, dt$$

   Pour la limite de $\mathcal{L}(f)$ en $+\infty$, on va utiliser le théorème de convergence dominée via la caractérisation séquentielle. On se donne donc une suite (x_n) de limite infinie. On peut sans perte de généralité supposer que $x_n \ge 1$ pour tout n (puisque $x_n \to +\infty$). On pose alors $g_n\ :\ t \mapsto f(t)e^{-x_n t}$.
   - $\forall n,\ g_n \in C^0(\mathbb{R}^+)$.
   - $\forall t \in \mathbb{R}^+,\ g_n(t) \to 0$ quand $n \to +\infty$ et la suite (g_n) est donc simplement convergente vers 0 sur $\mathbb{R}^+$.
   - $\forall n,\ \forall t \in \mathbb{R}^+,\ |g_n(t)| \le |f(t)|e^{-t}$ et le majorant est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (continu sur $\mathbb{R}^+$ et dominé par f au voisinage de $+\infty$).

   On en déduit que $\mathcal{L}(f)(x_n) \to 0$ et, par caractérisation séquentielle,

$$\lim_{x\to+\infty} \mathcal{L}(f)(x) = 0$$

18. (a) La fonction f proposée est continue sur $\mathbb{R}^+$ et intégrable sur $\mathbb{R}^+$. On peut alors utiliser ce qui précède. $\mathcal{L}(f)$ est ainsi de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et

$$\forall x > 0,\ \mathcal{L}(f)''(x) = \int_0^{+\infty} t^2 f(t)e^{-xt}\, dt$$

   On en déduit que

$$\forall x > 0,\ \mathcal{L}(f)''(x) + \mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} (t^2+1)f(t)e^{-xt}\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\, dt = \frac{1}{x}$$

   (b) Soient α et β des fonctions de classe C^2 telles que $\alpha' \cos + \beta' \sin$. Posons alors $g = \alpha \cos + \beta \sin$. On a alors (avec l'hypothèse faite sur α, β)

$$g' = -\alpha \sin + \beta \cos,\ g'' = -\alpha \cos - \beta \sin - \alpha' \sin + \beta' \cos$$

   et ainsi

$$g'' + g = -\alpha' \sin + \beta' \cos$$

   Pour que α et β conviennent, il suffit donc que $\begin{cases} \alpha'(x)\cos(x) + \beta'(x)\sin(x) = 0 \\ -\alpha'(x)\sin(x) + \beta'(x)\cos(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$. La résolution du système montre qu'il suffit que

$$\alpha'(x) = -\frac{\sin(x)}{x} \quad \text{et} \quad \beta'(x) = \frac{\cos(x)}{x}$$

Si h est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, $x \mapsto \int_1^x h(t)\ dt$ est une primitive de h sur $\mathbb{R}^{+*}$. Si, de plus, l'intégrale de h existe au voisinage de $+\infty$, on peut ajouter la constante $\int_1^{+\infty} h(t)\ dt$ (cela reste une primitive). $x \mapsto -\int_x^{+\infty} h(t)\ dt$ est ainsi aussi une primitive de h. On peut appliquer ceci avec $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ (on a prouvé l'existence de l'intégrale) et $t \mapsto \frac{\cos(t)}{t}$ (la preuve de l'existence est la même). On peut donc choisir

$$\alpha(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\ dt \ \text{ et } \ \beta(x) = -\int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t}\ dt$$

On peut donc choisir $f_1(t) = \frac{\sin(t)}{t}$ et $f_2(t) = -\frac{\cos(t)}{t}$.

(c) On a ainsi une solution particulière h définie par

$$h(x) = \cos(x) \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\ dt - \sin(x) \int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t}\ dt = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{t}\ dt$$

Le changement de variable affine $u = t - x$ donne

$$h(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{x+u}\ du$$

(d) L'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$ est un plan affine dirigé par l'ensemble des solutions de l'équation homogène $y'' + y = 0$, c'est à dire par $\text{Vect}(\cos, \sin)$. On obtient l'ensemble des solutions en ajoutant la solution particulière trouvée. Comme $\mathcal{L}(f)$ est solution sur $\mathbb{R}^{+*}$,

$$\exists a, b/\ \forall x > 0,\ \mathcal{L}(f)(x) = a\cos(x) + b\sin(x) + \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\ dt$$

19. Soit $x > 0$. $t \mapsto \frac{\sin(t)}{x+t}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$. On peut effetcuer une IPP pour obtenir

$$\forall a > 0,\ \int_0^a \frac{\sin(t)}{x+t}\ dt = \left[-\frac{\cos(t)}{x+t}\right]_0^a - \int_0^a \frac{\cos(t)}{(x+t)^2}\ dt$$

On en déduit que

$$\forall a > 0,\ \left|\int_0^a \frac{\sin(t)}{x+t}\ dt\right| \leq \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+a}\right) + \int_0^a \frac{dt}{(x+t)^2} \leq 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+a}\right)$$

Tous les termes admettent une limite quand $a \to +\infty$ et le passage à la limite donne

$$\left|\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\ dt\right| \leq \frac{2}{x}$$

On conclut que

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\ dt = 0$$

Comme $\mathcal{L}(f)$ est aussi de limite nulle en $+\infty$, on en conclut que $\lim_{x\to 0^+} a\cos + b\sin$ est de limite nulle en $+\infty$. En introduisant les suites $(2n\pi)$ et $(2n\pi + \pi/2)$, on en déduit que $a = b = 0$ et donc que

$$\forall x > 0,\ \mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\ dt$$

20. Remarquons que

$$\frac{\sin(t)}{x+t} - \frac{\sin(t)}{t} = -\frac{x\sin(t)}{t(x+t)}$$

On en déduit que

$$\forall t \geq 1,\ \left|\frac{\sin(t)}{x+t} - \frac{\sin(t)}{t}\right| \leq |x|\frac{1}{t^2}$$

Le majorant étant intégrable sur $[1,+\infty[$, on peut intégrer ! On obtient un majorant de limite nulle quand $x \to 0^+$:

$$\lim_{x\to 0^+} \int_1^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{x+t} - \frac{\sin(t)}{t}\right)\, dt = 0$$

Par ailleurs, comme $\forall t,\ |\sin(t)| \leq |t|$ et comme toutes les intégrales existent (fonctions continues ou prolongeables par continuité),

$$\left|\int_0^1 \left(\frac{\sin(t)}{x+t} - \frac{\sin(t)}{t}\right)\, dt\right| \leq \int_0^1 \frac{x}{x+t}\, dt = x\left(\ln(x+1) - \ln(x)\right)$$

et le majorant est de limite nulle quand $x \to 0$. Finalement,

$$\lim_{x\to 0} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, dt$$

21. On vient de voir que $\mathcal{L}(f)(x)$ tend vers $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, dt$ quand $x \to 0$. Mais $\mathcal{L}(f)$ est continue en 0 et donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, dt = \mathcal{L}(f)(0) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$$

Partie 3 : phénomène de Gibbs

22. S_n est dérivable comme somme de fonctions dérivables et

$$S_n'(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{n} \cos((2k+1)x) = \frac{4}{\pi}\mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{i(2k+1)x}\right)$$

Si $x \notin \pi\mathbb{Z}$ alors $e^{2ix} \neq 1$ et (somme géométrique)

$$\sum_{k=0}^{n} e^{i(2k+1)x} = e^{ix}\frac{1-e^{2i(n+1)x}}{1-e^{2ix}} = e^{i(n+1)x}\frac{\sin((n+1)x)}{\sin(x)}$$

On en déduit alors que

$$S_n'(x) = \frac{4}{\pi}\frac{\sin((n+1)x)\cos((n+1)x)}{\sin(x)} = \frac{2}{\pi}\frac{\sin(2(n+1)x)}{\sin(x)}$$

Le membre de gauche est continu en 0 et on peut donc intégrer cette égalité sur $[0,x]$ pour tout $x \in [0,\pi]$. Comme $S_n(0) = 0$, on obtient

$$\forall x \in [0,\pi],\ S_n(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^x \frac{\sin(2(n+1)t)}{\sin(t)}\, dt$$

23. On sait que

$$\forall t \in [0,1[,\ \frac{1}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{\infty}(-t^2)^k$$

Ainsi, en intégrant sur $[0,1[$,

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}\, dt = \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k t^{2k}\, dt$$

n étant fixé, on découpe la somme en deux morceaux :

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 (-1)^k t^{2k}\, dt + \int_0^1 \sum_{k=n+1}^{\infty} (-t^2)^k\, dt = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} + \int_0^1 \sum_{k=n+1}^{\infty} (-t^2)^k\, dt$$

La somme est encore géométrique et on peut écrire cela sous la forme

$$\frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \int_0^1 \frac{(-t^2)^{n+1}}{1+t^2}\, dt = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\, dt$$

On en déduit que

$$\left| \frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \right| \leq \int_0^1 t^{2n+2}\, dt = \frac{1}{2n+3} \to 0$$

et ainsi

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$$

24. On a $\sin((2n+1)\frac{\pi}{2}) = \sin(n\pi + \frac{\pi}{2}) = (-1)^n$ et donc

$$S_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} S_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

25. On a $\sin((2n+1)(\pi - x)) = \sin((2n+1)\pi - (2n+1)x) = \sin((2n+1)x)$. Il en ressort alors que

$$\forall x,\ S_n(\pi - x) = S_n(x)$$

On fixe maintenant $x \in]0, \pi/2]$. Comme $\frac{\sin(2(n+1)t)}{t}$ est continue sur $]0, x]$ et prolongeable par continuité en 0, on peut utiliser la question 22 pour écrire que

$$S_n(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x \sin(2(n+1)t) \left(\frac{1}{\sin(t)} - \frac{1}{t} \right) dt + \frac{2}{\pi} \int_0^x \frac{\sin(2(n+1)t)}{t}\, dt$$

$t \mapsto \frac{1}{\sin(t)} - \frac{1}{t} = \frac{t - \sin(t)}{t \sin(t)}$ est continue sur $]0, x]$ et prolongeable par continuité en 0 (équivalent à $\frac{t^3}{6t^2} \to 0$). On peut alors utiliser la question 12 avec cette fonction de $\varphi\ :\ t \mapsto \sin(2t)$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^x \sin(2(n+1)t) \left(\frac{1}{\sin(t)} - \frac{1}{t} \right) dt = 0$$

Par ailleurs, le changement de variable $u = 2(n+1)t$ donne

$$\int_0^x \frac{\sin(2(n+1)t)}{t}\, dt = \int_0^{2(n+1)x} \frac{\sin(u)}{u}\, du$$

Comme $x > 0$, cette quantité tend vers $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}\, du = \frac{\pi}{2}$ quand $n \to +\infty$.
En conclusion, on a

$$\forall x \in]0, \pi/2],\ \lim_{n\to+\infty} S_n(x) = 1$$

26. On vient de voir que $\forall x \in]0, \pi/2]$, $S_n(x) \to 1 = f(x)$.
Comme $f(\pi - x) = f(x)$ et $S_n(\pi - x) = S_n(x)$, la propriété reste vraie pour $x \in [\pi, 2, \pi[$.
On a aussi $S_n(0) = 0 \to 0 = f(0)$ et $S_n(\pi) = 0 \to 0 = f(\pi)$ et la propriété est finalement valable sur $[0, \pi]$.
Par imparité des S_n et de f, cette propriété est finalement valable sur $\mathbb{R}$. On a donc convergence simple sur $\mathbb{R}$ de (S_n).
27. On a immédiatement $\varphi_n(0) = 0 \to 0$.
Soit maintenant $x \in]0, \pi]$. On a $\sin(\frac{x}{2n}) \sim \frac{x}{2n}$ quand $n \to +\infty$. On en déduit que $\varphi_n(x) \to \frac{\sin(x)}{x} = \varphi(x)$.
On a montré que (φ_n) converge simplement sur $[0, \pi]$ vers φ.
28. Il est immédiat, par théorèmes d'opération, que φ est continue sur $]0, \pi/2]$. Comme $\sin(x) \sim_0 x$ on a aussi continuité en 0.
La question 22 donne

$$S_n\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2(n+1)}} \frac{\sin(2(n+1)t)}{\sin(t)}\,dt$$

Le changement de variable affine $u = 2(n+1)t$ donne

$$S_n\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \varphi_{n+1}(u)\,du$$

On veut intervertir limite et intégrale et on pense au théorème de convergence dominée.
- (φ_{n+1}) est une suite de fonctions continue sur $[0, \pi]$ qui converge simplement sur $[0, \pi]$ vers φ qui est elle même continue sur $[0, \pi]$.
- La fonction $t \mapsto \sin(t)/t$ est continue sur $[0, \pi/2]$ qui est un segment. Cette fonction est donc bornée sur ce segment et atteint ses bornes. Ainsi, il existe un réel t_1 telles que

$$\forall t \in [0, \pi/2],\ m = \frac{\sin(t_1)}{t_1} \le \frac{\sin(t)}{t}$$

  Comme $m > 0$, on peut aussi écrire que

$$\forall t \in [0, \pi/2],\ 0 \le \frac{t}{\sin(t)} \le \frac{1}{m}$$

  On va appliquer cela pour $x \in]0, \pi]$ et $n \ge 0$ à $t = \frac{x}{2(n+1)} \in [0, \pi/2]$ et le fait que pour $x \in]0, \pi]$, $0 \le \frac{\sin(x)}{x} \le 1$:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0, \pi],\ |\varphi_{n+1}(x)| = \frac{\sin(x)}{x}\frac{x/(2(n+1))}{\sin(x/(2(n+1)))} \le \frac{1}{m}$$

  Le majorant, qui est constant, est intégrable sur $]0, \pi]$.

Le théorème s'applique et donne

$$\lim_{n\to+\infty} S_n\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{x}\,dx$$

Comme $f(\pi/(2(n+1))) = 1 \to 1$, on a donc

$$\lim_{n\to+\infty}\left(f\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right) - S_n\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right)\right) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{x}\,dx\right) = \frac{2}{\pi}\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,dx$$

29. En utilisant le DSE de sin, on sait que

$$\forall x \in]0,\pi],\ \frac{\sin(x)}{x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$$

La relation reste vraie pour $x = 0$. La série entière qui apparaît est de rayon de convergence infini et converge donc normalement sur $[0,\pi]$. Quand on intégre sur $[0,\pi]$, on est dans le cas simple où l'on peut intervertir somme et intégrale sur un segment. ceci donne

$$\int_0^\pi \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^\pi (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}$$

Avec la question 28, on a donc

$$\lim_{n\to+\infty} S_n\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!} = 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\pi^{2n}}{(2n+1)(2n+1)!}$$

A nouveau, $f(\pi/(2(n+1))) = 1 \to 1$ et donc

$$\lim_{n\to+\infty}\left(S_n\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right) - f\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right)\right) = 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\pi^{2n}}{(2n+1)(2n+1)!} - 1$$

30. Posons $u_n = (-1)^n \frac{\pi^{2n}}{(2n+1)(2n+1)!}$. (u_n) est une suite alternée qui est de limite nulle (la série associé converge). De plus

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{\pi^2(2n+1)}{(2n+3)^2(2n+2)} \leq \frac{\pi^2}{(2n+3)^2}$$

Pour $n \geq 1$, ce quotient est ≤ 1. La suite $(|u_n|)$ décroît donc à partir du rang 1. On en déduit que $\sum_{k\geq n} u_k$ est du signe de u_n pour $n \geq 1$. En particulier, pour $n = 4$,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\pi^{2n}}{(2n+1)(2n+1)!} - \sum_{n=0}^{3}(-1)^n \frac{\pi^{2n}}{(2n+1)(2n+1)!} \geq 0$$

En particulier,

$$2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\pi^{2n}}{(2n+1)(2n+1)!} - 1 \geq 2\sum_{n=0}^{3}(-1)^n \frac{\pi^{2n}}{(2n+1)(2n+1)!} - 1$$

On peut raisonnablement penser que cette quantité est > 0.17, ce que je ne vérifie pas et on conclut.
En particulier

$$\|S_n - f\|_{\infty,]0,\pi/2[} \geq \left(S_n\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right) - f\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right)\right)$$

montre que $\|S_n - f\|_{\infty,]0,\pi/2[}$ n'est pas de limite nulle. On n'a donc pas de convergence uniforme sur $]0,\pi/2[$.