Centrale-Supélec 2014
Filière TSI
Corrigé de l'épreuve Mathématiques I

Damien Broizat
TSI 2 Lycée Jules Ferry, Cannes

I Polynômes et nombres de Bernoulli

I.A **- I.A.1)** On fixe $P \in \mathbb{R}[X]$ et on procède par analyse-synthèse :

- Si P se décompose sous la forme $P = Q + \lambda$ avec $Q \in H$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors en intégrant sur $[0,1]$, on obtient (par linéarité de l'intégrale) :
$$\int_0^1 P(x)dx = \underbrace{\int_0^1 Q(x)dx}_{=0} + \int_0^1 \lambda dx = \lambda,$$
et donc
$$Q = P - \lambda = P - \int_0^1 P(x)dx.$$
Ceci montre (sous réserve d'existence) l'unicité de la décomposition.
- La décomposition précédemment obtenue convient car en posant
$Q = P(t) - \displaystyle\int_0^1 P(x)dx$ et $\lambda = \displaystyle\int_0^1 P(x)dx$, on a
  - $P = Q + \lambda$,
  - $\lambda \in \mathbb{R}$,
  - $Q \in H$ car $\displaystyle\int_0^1 Q(x)dx = \int_0^1 (P(x) - \lambda)\, dx = \int_0^1 P(x)dx - \lambda = 0.$

On en déduit qu' $\boxed{\text{il existe un unique couple } (Q, \lambda) \in H \times \mathbb{R} \text{ tel que } P = Q + \lambda}$.

I.A.2) Soit $R \in \mathbb{R}[X]$. Cette fonction polynomiale possède une primitive (elle-même polynomiale), notée P. D'après la question précédente, on peut écrire $P = Q + \lambda$ avec $Q \in H$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. D'où :
$$R = P' = (Q + \lambda)' = Q' + \underbrace{\lambda'}_{=0} = D(Q),$$
ce qui montre que tout $R \in \mathbb{R}[X]$ possède un antécédent dans H par D, c'est-à-dire $\boxed{D \text{ surjective}}$.

I.A.3) En plus d'être linéaire et surjective, l'application D est injective car son noyau est nul. En effet, si $P \in H$ et $D(P) = 0$, alors P est constant et d'intégrale nulle sur $[0, 1]$, donc nul. D est donc une bijection linéaire, c'est-à-dire $\boxed{\text{un isomorphisme}}$.

I.A.4) a) La fonction Q est polynomiale car c'est manifestement une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction polynomiale P (elle est de la forme $x \mapsto \int_0^x P(t)dt + cste$).

Ensuite, en décomposant P suivant la base monomiale ($P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ avec $d \in \mathbb{N}$ et les a_k réels), on obtient, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} Q(x) &= \int_0^x \left(\sum_{k=0}^{d} a_k t^k \right) dt + \int_0^1 (t-1) \left(\sum_{k=0}^{d} a_k t^k \right) dt \\ &= \sum_{k=0}^{d} a_k \left(\int_0^x t^k dt \right) + \sum_{k=0}^{d} a_k \int_0^1 (t^{k+1} - t^k) dt \\ &= \sum_{k=0}^{d} a_k \frac{x^{k+1}}{k+1} + \sum_{k=0}^{d} a_k \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+1} \right). \end{aligned}$$

En intégrant sur $[0, 1]$, on obtient :

$$\int_0^1 Q(x)dx = \sum_{k=0}^{d} a_k \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \sum_{k=0}^{d} a_k \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+1} \right),$$

c'est-à-dire

$$\int_0^1 Q(x)dx = \sum_{k=0}^{d} a_k \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \sum_{k=0}^{d} a_k \left(\frac{-1}{(k+2)(k+1)} \right) = 0,$$

et donc $\boxed{Q \in H}$.

b) Q est un polynôme de H tel que $Q' = P$, c'est donc (d'après **I.A.3)**) l'unique polynôme de H vérifiant cette propriété, et donc $\boxed{Q = \varphi(P)}$.

I.B **- I.B.1)** Pour tout réel x, on a, en utilisant la question **I.A.4)** :

$$B_1(x) = \varphi(B_0)(x) = \int_0^x dt + \int_0^1 (t-1)dt = x - \frac{1}{2},$$

$$B_2(x) = \varphi(B_1)(x) = \int_0^x \left(t - \frac{1}{2} \right) dt + \int_0^1 (t-1) \left(t - \frac{1}{2} \right) dt = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{12},$$

donc $\boxed{B_1 = X - \frac{1}{2}}$ et $\boxed{B_2 = \frac{X^2}{2} - \frac{X}{2} + \frac{1}{12} = \frac{1}{2}(X^2 - X + \frac{1}{6})}$.

I.B.2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_{n+1} = \varphi(B_n)$ est une primitive de B_n, donc

$$B_{n+1}(1) - B_{n+1}(0) = \int_0^1 B_n(x)dx.$$

Mais puisque $\varphi(\mathbb{R}[X]) = H$, on a $B_n \in H$ pour tout $n \geq 1$, donc $B_{n+1}(1) - B_{n+1}(0) = 0$ pour tout $n \geq 1$, c'est-à-dire $\boxed{\forall n \geq 2,\ B_n(0) = B_n(1)}$.

I.C **- I.C.1)** Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$C'_{n+1}(x) = \frac{d}{dx} \big((-1)^{n+1} B_{n+1}(1-x) \big) = (-1)^{n+2} B'_{n+1}(1-x).$$

Mais B_{n+1} est une primitive de B_n, donc

$$C'_{n+1}(x) = (-1)^n B_n(1-x) = C_n(x),$$

ce qui montre que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ C'_{n+1} = C_n}$.

I.C.2) Soit $n \in \mathbb{N}$. Le polynôme C_{n+1} est dans H car

$$\int_0^1 C_{n+1}(x)dx = (-1)^{n+1}\int_0^1 B_{n+1}(1-x)dx = (-1)^{n+1}\int_1^0 B_{n+1}(y)(-dy)$$

(avec le changement de variable $y = 1-x$), c'est-à-dire

$$\int_0^1 C_{n+1}(x)dx = (-1)^{n+1}\int_0^1 B_{n+1}(y)dy,$$

et $B_{n+1} = \varphi(B_n)$ est dans H, donc $\displaystyle\int_0^1 B_{n+1}(y)dy = 0$, ce qui entraîne $\displaystyle\int_0^1 C_{n+1}(x)dx = 0$.
Or, d'après la question précédente, C_{n+1} est une primitive de C_n.
D'après **I.A.3)**, le polynôme C_{n+1} est donc la seule primitive de C_n qui est dans H, c'est-à-dire $\boxed{C_{n+1} = \varphi(C_n)}$.

I.C.3) On a $C_0 = B_0 = 1$ et $\begin{cases} C_{n+1} = \varphi(C_n) \\ B_{n+1} = \varphi(B_n) \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc une récurrence triviale montre que $C_n = B_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui signifie $(-1)^n B_n(1-x) = B_n(x)$, et donc (en multipliant par $(-1)^n$) :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x)}.$$

I.C.4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La relation précédemment obtenue implique

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad B_{2n+1}(1-x) = -B_{2n+1}(x).$$

En évaluant en $x = 0$, cela donne $B_{2n+1}(1) = -B_{2n+1}(0)$.
Mais $2n+1 \geq 3$, donc d'après **I.B.2)**, $B_{2n+1}(1) = B_{2n+1}(0)$.
On déduit de ces deux relations $\boxed{B_{2n+1}(1) = B_{2n+1}(0) = 0}$.