Mathématiques 1

TSI

2014

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

4 heures Calculatrices autorisées

I Polynômes et nombres de Bernoulli

Dans l'espace $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels, on considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel H défini par

$$H = \left\{P \in \mathbb{R}[X]; \int_0^1 P(x)\ \mathrm{d}x = 0\right\}$$

Dans tout le problème, on confond les polynômes et les fonctions polynômes.
On note D l'application linéaire de H dans $\mathbb{R}[X]$ qui à tout polynôme $P \in H$ associe son polynôme dérivé P'

$$\forall P \in H, \quad D(P) = P'$$

On identifiera polynôme constant et nombre réel.

I.A –

I.A.1) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

À l'aide de l'égalité $P = \left(P - \displaystyle\int_0^1 P(x)\ \mathrm{d}x\right) + \displaystyle\int_0^1 P(x)\ \mathrm{d}x$, montrer qu'il existe un unique couple $(Q, \lambda) \in H \times \mathbb{R}$ tel que $P = Q + \lambda$.

I.A.2) En déduire que D est surjectif.

I.A.3) Montrer que D est un isomorphisme.

On note $\varphi = D^{-1}$, l'isomorphisme réciproque. Ainsi, si $A \in \mathbb{R}[X]$, le polynôme B tel que $B = \varphi(A)$ est l'unique polynôme dans H tel que $B' = A$.

I.A.4) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On note Q la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Q(x) = \int_0^x P(t)\ \mathrm{d}t + \int_0^1 (t-1)P(t)\ \mathrm{d}t$$

On pourra considérer une primitive de P.

a) Montrer que $Q \in H$.

b) Vérifier que $Q = \varphi(P)$.

I.B – On considère la suite de polynômes $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $B_0 = 1$ et par la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad B_{n+1} = \varphi(B_n)$$

Le polynôme nB_n est le n-ième *polynôme de Bernoulli*.

I.B.1) Calculer B_1 et B_2.

I.B.2) Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, $B_n(0) = B_n(1)$.

I.C – Soit $n \in \mathbb{N}$, on définit le polynôme C_n par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad C_n(x) = (-1)^n B_n(1-x)$$

I.C.1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer C'_{n+1} à l'aide de C_n.

I.C.2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_{n+1} = \varphi(C_n)$.

I.C.3) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x)$.

I.C.4) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que les nombres $B_{2n+1}(0)$ et $B_{2n+1}(1)$ sont nuls.

