PROBLÈME : RÉSULTANT DE DEUX POLYNÔMES

I. Définition et propriétés

Soient p et q deux entiers naturels non nuls,

$$P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k \text{ et } Q = \sum_{k=0}^{q} b_k X^k$$

deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$ avec $a_p \neq 0$ et $b_q \neq 0$.
Le résultant des polynômes P et Q est le nombre complexe noté $\mathrm{Res}(P,Q)$:

$$\mathrm{Res}(P,Q) = \begin{vmatrix} a_0 & & & & b_0 & & \\ a_1 & \ddots & & & b_1 & \ddots & \\ \vdots & & a_0 & & \vdots & & b_0 \\ a_p & & a_1 & a_0 & \vdots & & b_1 \\ & \ddots & \vdots & a_1 & b_q & & \vdots \\ & & a_p & \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & & a_p & & & b_q \end{vmatrix}.$$

C'est un déterminant $q+p$ colonnes, dont les q premières colonnes représentent les coefficients du polynôme P et les p suivantes représentent les coefficients du polynôme Q ; les positions non remplies étant des zéros. Par exemple, si $P = 1 + 2X + 3X^2$ et $Q = 4 + 5X + 6X^2 + 7X^3$,

$$\mathrm{Res}(P,Q) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 6 & 5 \\ 0 & 3 & 2 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 7 \end{vmatrix}.$$

La matrice servant à définir $\mathrm{Res}(P,Q)$ pourra être notée $M_{P,Q}$:

$$\mathrm{Res}(P,Q) = \det M_{P,Q}.$$

On note $E = \mathbb{C}_{q-1}[X] \times \mathbb{C}_{p-1}[X]$ et $F = \mathbb{C}_{p+q-1}[X]$.
Soit u l'application de E dans F définie pour $(A,B) \in E$ par : $u(A,B) = PA + QB$.

1. **Cas où u est bijective**

   (a) Démontrer que u est une application linéaire.

   (b) Si on suppose que u est bijective, démontrer que P et Q sont premiers entre eux.

   (c) Si on suppose que P et Q sont premiers entre eux, déterminer $\mathrm{Ker}(u)$ et en déduire que u est bijective.

2. **Matrice de u**
   On note $\mathcal{B} = ((1,0),(X,0),\ldots,(X^{q-1},0)(0,1),(0,X),\ldots,(0,X^{p-1}))$ une base de E et $\mathcal{B}' = (1, X, \cdots, X^{p+q-1})$ la base canonique de F.

   (a) Déterminer la matrice de u par rapport aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

(b) Démontrer que $\mathrm{Res}(P, Q) \neq 0$ si et seulement si P et Q sont premiers entre eux (donc $\mathrm{Res}(P, Q) = 0$ si et seulement si P et Q ont au moins une racine commune complexe).

3. **Racine multiple**

(a) Démontrer qu'un polynôme P de $\mathbb{C}[X]$ admet une racine multiple dans $\mathbb{C}$ si et seulement si $\mathrm{Res}(P, P') = 0$.

(b) *Application* : déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que le polynôme $X^3 + aX + b$ admette une racine multiple.

II. Applications

4. **Équation de Bézout**
Dans cette question, on note $P = X^4 + X^3 + 1$ et $Q = X^3 - X + 1$.

(a) Démontrer, en utilisant la première partie, que les polynômes P et Q sont premiers entre eux.

(b) On cherche un couple (A_0, B_0) de polynômes de $\mathbb{C}[X]$ tel que : $PA_0 + QB_0 = 1$. Expliquer comment on peut trouver un tel couple en utilisant la matrice de u, puis donner un couple solution.

(c) Déterminer tous les couples (A, B) de polynômes de $\mathbb{C}[X]$ vérifiant : $PA + QB = 1$.
On pourra commencer par remarquer que, si (A, B) est un couple solution, alors $P(A - A_0) = Q(B_0 - B)$.

5. **Équation d'une courbe**

(a) On considère la courbe Γ de représentation paramétrique :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x(t) & = & t^2 + t \\ y(t) & = & t^2 - t + 1 \end{array} \right. \quad \text{pour } t \in \mathbb{R}.$$

Étudier et construire la courbe Γ, on précisera les branches infinies.

(b) On se donne deux polynômes P et Q à coefficients réels et l'on pose, pour $(x, y, t) \in \mathbb{R}^3$, $A(t) = P(t) - x$ et $B(t) = Q(t) - y$. Établir que si un point M de coordonnées (x, y) appartient à la courbe de représentation paramétrique :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x(t) & = & P(t) \\ y(t) & = & Q(t) \end{array} \right. \quad \text{pour} t \in \mathbb{R}.$$

alors les fonctions polynômes A et B ont une racine commune.
En déduire qu'un point M de coordonnées (x, y) appartenant à la courbe Γ vérifie :

$$x^2 + y^2 - 2xy - 4y + 3 = 0.$$

(c) Expliquer brièvement et sans calcul, à partir de la matrice de la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^2$ par $q(x, y) = x^2 + y^2 - 2xy$, la nature de la courbe d'équation cartésienne $x^2 + y^2 - 2xy - 4y + 3 = 0$.

6. **Nombre algébrique**
En utilisant les polynômes $P(X) = X^2 - 3$ et $Q_y(X) = (y - X)^2 - 7$, déterminer un polynôme à coefficients entiers de degré 4 ayant comme racine $\sqrt{3} + \sqrt{7}$. Quelles sont les autres racines de ce polynôme ?