Corrigé de Centrale 2012 PC math 1
Partie II

II.A 1) $\dfrac{1}{1-x^2}$ est la somme de la série géométrique de raison x^2 et de premier terme 1, donc $b_n = 1$ si n est pair, 0 si n est impair.

2) En prenant $a_n = 2b_n$ on obtient $f(x) = \dfrac{2}{1-x^2}$ qui vérifie bien
$f(x) = \dfrac{1}{(1+x)(1-x)} \sim \dfrac{2}{2(1-x)} = \dfrac{1}{1-x}$ au voisinage de 1^-.
Mais la suite (a_n) diverge puisque $a_{2n} = 2$ et $a_{2n+1} = 0$.

II.B 1) Le rayon de convergence des séries entières $\sum t^n$ et $\sum nt^{n-1}$ est égal à 1. La convergence de la série de fonctions dérivées $\sum nt^{n-1}$ est donc normale, donc uniforme sur tout segment $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$ pour $\varepsilon > 0$.

Par théorème de dérivation terme à terme de $\dfrac{1}{1-t} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} t^n$ pour $t \in]-1,1[$ on obtient $\dfrac{1}{(1-t)^2} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nt^{n-1}$ avec le même rayon de convergence égal à 1. La série diverge pour $t = 1$ et pour $t = -1$ puisque son terme général ne tend pas vers 0.
On pouvait aussi faire un produit de Cauchy et retrouver la formule du binôme négatif.

2) En posant $t = x^2$ et en changeant n en $n+1$ on obtient $\varphi(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^{2n}$ pour $x \in]-1,1[$.

Par suite, $u_{2n} = n+1$ et $u_{2n+1} = 0$.
$\psi(x) = (1-x)\varphi(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(x^{2n} - x^{2n+1})$ pour $x \in]-1,1[$. Par suite, $v_{2n} = n+1$ et $v_{2n+1} = -(n+1)$.

3) Puisque $v_{2n} + v_{2n+1} = 0$ on déduit $\tilde{v}_{2n+1} = 0$ et $\tilde{v}_{2n} = \dfrac{n+1}{2n+1}$.

4) En prenant $a_n = 4v_n$, on obtient $f(x) = \dfrac{4}{(1+x)^2(1-x)}$ qui vérifie bien $f(x) \sim \dfrac{1}{1-x}$ au voisinage de 1^-. Mais la suite $(\tilde{a}_n)$ diverge puisque $\tilde{a}_{2n+1} = 0$ alors que $\tilde{a}_{2n}$ tend vers 2.

II.C 1) Pour $x \in [0,1[$ et $k \leqslant n$ on a $x^k \geqslant x^n$. De plus $a_n \geqslant 0$.

On en déduit: $f(x) \geqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \geqslant \sum_{k=0}^{n} a_k x^n = A_n x^n$.

2) Par hypothèse, $(1-x)f(x)$ tend vers 1 quand x tend vers 1. Il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que $1-\varepsilon \leqslant x < 1$ entraine $(1-x)f(x) \leqslant 2$.
Comme $e^{-1/n}$ tend vers 1 quand n tend vers l'infini on déduit qu'il existe $N > 0$ tel que $n \geqslant N$ entraine $1-\varepsilon \leqslant e^{-1/n} < 1$ et donc $(1-e^{-1/n})f(e^{-1/n}) \leqslant 2$, d'où $f(e^{-1/n}) \leqslant \dfrac{2}{1-e^{-1/n}}$.

3) Pour $x = e^{-1/n}$ et $n \geqslant N$ on a $A_n e^{-1} \leqslant f(e^{-1/n}) \leqslant \dfrac{2}{1-e^{-1/n}}$ d'où:

$\tilde{a}_n \leqslant \dfrac{2e}{(n+1)(1-e^{-1/n})} \leqslant \dfrac{2ee^{1/n}}{n(e^{1/n}-1)} \leqslant 2e^2$ puisque $e^x - 1 \geqslant x$ et $n \geqslant 1$.
La suite $\tilde{a}_n$ est majorée pour $n \geqslant N$, donc aussi pour tout n.

II.D 1) a) $(1-x)\sum_{k=0}^{n} A_k x^k = \sum_{k=0}^{n} A_k x^k - \sum_{k=0}^{n} A_k x^{k+1} = \sum_{k=0}^{n} A_k x^k - \sum_{k=1}^{n+1} A_{k-1} x^k = A_0 + \sum_{k=1}^{n}(A_k - A_{k-1})x^k - A_n x^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k - A_n x^{n+1}$. Comme pour $x \in]-1,1[$, $|A_n x^{n+1}| \leqslant A_n |x|^{n+1} \leqslant (n+1)\mu |x|^{n+1}$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini, on déduit $(1-x)\sum_{k=0}^{+\infty} A_k x^k = f(x)$.

b) $\dfrac{f(x)}{1-x} = \sum_{k=0}^{N-1} A_k x^k + \sum_{k=N}^{+\infty} A_k x^k \leqslant \sum_{k=0}^{N-1} A_{N-1} x^k + \sum_{k=N}^{+\infty} (k+1)\mu x^k$ (puisque $x \geqslant 0$, que la suite A_k est croissante et que $A_k \leqslant (k+1)\mu$). Par suite, $\dfrac{f(x)}{1-x} \leqslant A_{N-1}\dfrac{1-x^N}{1-x} + \mu \sum_{k=N}^{+\infty}(k+1)x^k$.

c) On en déduit (toujours pour $x \in [0,1[$): $f(x) \leqslant A_{N-1} + \mu \sum_{k=N}^{+\infty}(k+1)(x^k - x^{k+1})$.

$\sum_{k=N}^{n}(k+1)(x^k - x^{k+1}) = \sum_{k=N}^{n}(k+1)x^k - \sum_{k=N+1}^{n+1} kx^k = (N+1)x^N + \sum_{k=N+1}^{n} x^k - (n+1)x^{n+1}$

qui tend vers $(N+1)x^N + \dfrac{x^{N+1}}{1-x}$ quand n tend vers l'infini.

On a donc $f(x) \leqslant A_{N-1} + \mu\left((N+1)x^N + \dfrac{x^{N+1}}{1-x}\right)$.

2) a) Par hypothèse, $(1-x)f(x)$ tend vers 1 quand x tend vers 1, donc $(1-e^{-x})f(e^{-x})$ tend vers 1 quand x tend vers 0. Il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que $0 < x \leqslant \varepsilon$ entraine $(1-e^{-x})f(e^{-x}) \geqslant \frac{1}{2}$. D'autre part, $e^{-x} \geqslant 1-x$ entraine pour $x > 0$: $\dfrac{1}{1-e^{-x}} \geqslant \dfrac{1}{x}$. On en déduit $f(e^{-x}) \geqslant \dfrac{1}{2x}$ pour $0 < x \leqslant \varepsilon$. En posant $x = \dfrac{\lambda}{N}$ on obtient $f(e^{-\frac{\lambda}{N}}) \geqslant \dfrac{N}{2\lambda}$ pour $N \geqslant N_0$.

b) En prenant $x = e^{-\frac{\lambda}{N}}$ dans II.D.1.c on obtient

$f(e^{-\frac{\lambda}{N}}) \leqslant A_{N-1} + \mu\left((N+1)(e^{-\frac{\lambda}{N}})^N + (\dfrac{(e^{-\frac{\lambda}{N}})^{N+1}}{1-e^{-\frac{\lambda}{N}}}\right)$ donc

$A_{N-1} \geqslant f(e^{-\frac{\lambda}{N}}) - \mu\left((N+1)e^{-\lambda} + \dfrac{(e^{-\frac{\lambda}{N}})^{N+1}}{1-e^{-\frac{\lambda}{N}}}\right)$

avec II.D.2.a (pour $N \geqslant N_0$):

$A_{N-1} \geqslant \dfrac{N}{2\lambda} - \mu\left((N+1)e^{-\lambda} + \dfrac{e^{-\lambda}e^{-\frac{\lambda}{N}}}{1-e^{-\frac{\lambda}{N}}}\right)$.

Avec $\tilde{a}_{N-1} = \dfrac{A_{N-1}}{N}$ on obtient $\tilde{a}_{N-1} \geqslant \dfrac{1}{2\lambda} - \mu e^{-\lambda}\left(1 + \dfrac{1}{N} + \dfrac{e^{-\frac{\lambda}{N}}}{N(1-e^{-\frac{\lambda}{N}})}\right)$.

c) Avec $1 - e^{-x} \sim x$ au voisinage de 0 on déduit que $N(1-e^{-\frac{\lambda}{N}}) \sim \lambda$ quand N tend vers l'infini. Par suite le membre de droite du II.D.2.b a pour limite (quand N tend vers l'infini): $\dfrac{1}{2\lambda} - \mu e^{-\lambda}\left(1 + \dfrac{1}{\lambda}\right) = \dfrac{1}{2\lambda}(1 - 2\mu e^{-\lambda}(\lambda+1)) = 2\nu$.

d) $\lim_{\lambda \mapsto +\infty} e^{-\lambda}(\lambda+1) = 0$ entraine que $\nu > 0$ pour λ assez grand.

3) Pour un tel λ on obtient $\tilde{a}_n \geqslant \nu > 0$ pour $n \geqslant N_0 + 1$.