# II Un théorème de Hardy-Littlewood

Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle. On suppose que la série entière associée $\sum a_n x^n$ admet pour rayon de convergence $R_a = 1$ et que la somme $f$ de cette série, définie par

$$\forall x \in \left]-1, 1\right[ \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

vérifie

$$f(x) \sim \frac{1}{1-x} \qquad \text{quand } x \to 1,\ x < 1. \tag{II.1}$$

On note

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \qquad \text{et} \qquad \widetilde{a}_n = \frac{A_n}{n+1}.$$

Ainsi, $\widetilde{a}_n$ est la moyenne arithmétique des nombres $a_0, \ldots, a_n$.

Le but de cette partie est d'étudier le comportement des $a_n$ lorsque $n$ tend vers l'infini. On s'intéresse en particulier aux deux propriétés suivantes :

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1 \tag{II.2}$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \widetilde{a}_n = 1 \tag{II.3}$$

### *II.A – L'hypothèse II.1 n'entraîne pas la propriété II.2*

**II.A.1)** Déterminer une suite réelle $(b_n)_{n\geqslant 0}$ telle que

$$\forall x \in \left]-1, 1\right[, \qquad \frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n.$$

**II.A.2)** En déduire un exemple de suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant **II.1** mais ne convergeant pas vers 1.

### *II.B – L'hypothèse II.1 n'entraîne pas la propriété II.3*

**II.B.1)** Donner le développement en série entière de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{(1-t)^2}$ ainsi que son rayon de convergence. Préciser si la série converge aux bornes de l'intervalle de convergence.

**II.B.2)** On considère les fonctions $\varphi : x \mapsto \dfrac{1}{(1-x^2)^2}$ et $\psi : x \mapsto \dfrac{1}{(1+x)^2(1-x)}$. Déterminer des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que, pour tout $x \in \left]-1,1\right[$,

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n \quad \text{et} \quad \psi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n.$$

On explicitera en fonction de $n$, suivant la parité de $n$, les réels $u_n$ et $v_n$.

**II.B.3)** Calculer $\widetilde{v}_n$ (moyenne arithmétique des nombres $v_0, \ldots, v_n$).

**II.B.4)** Construire à l'aide de $\psi$ un exemple de suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant **II.1** mais ne vérifiant pas la **propriété II.3**.

Jusqu'à la fin de cette partie, on continue de supposer **II.1** et on fait l'hypothèse supplémentaire :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \geqslant 0. \tag{II.4}$$

L'objectif principal, après quelques observations concernant la suite $(\widetilde{a}_n)_{n\geqslant 0}$, est de démontrer la **propriété II.3** (théorème de Hardy et Littlewood).

### *II.C – Majoration de la suite $(\widetilde{a}_n)_{n\geqslant 0}$*

**II.C.1)** Pour tout $x \in [0,1[$ et tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que $f(x) \geqslant A_n x^n$.

**II.C.2)** Montrer l'existence d'un entier $N > 0$ tel que

$$\forall n \geqslant N,\ f(\mathrm{e}^{-1/n}) \leqslant \frac{2}{1-\mathrm{e}^{-1/n}}.$$

**II.C.3)** En déduire que la suite $(\widetilde{a}_n)_{n\geqslant 0}$ est majorée.

### *II.D – Minoration, à partir d'un certain rang, de $(\widetilde{a}_n)_{n\geqslant 0}$ par un réel > 0*

On désigne par $\mu > 0$ un majorant de la suite $(\widetilde{a}_n)_{n\geqslant 0}$ : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\widetilde{a}_n \leqslant \mu$.

**II.D.1)** *a)* Pour tout $x \in \left]-1,1\right[$, montrer que $(1-x)\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} A_k x^k = f(x)$.

*b)* En déduire que pour tout $x \in [0,1[$ et tout $N \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{f(x)}{1-x} \leqslant A_{N-1}\frac{1-x^N}{1-x} + \mu \sum_{k=N}^{+\infty}(k+1)x^k.$$

*c)* En déduire que pour tout $x \in [0,1[$ et tout $N \in \mathbb{N}^*$

$$f(x) \leqslant A_{N-1} + \mu\left((N+1)x^N + \frac{x^{N+1}}{1-x}\right).$$

**II.D.2)** Soit $\lambda$ un réel strictement positif.

*a)* Montrer qu'il existe un entier $N_0 > 0$ tel que pour tout $N \geqslant N_0$,

$$f(\mathrm{e}^{-\lambda/N}) \geqslant \frac{1}{2(1-\mathrm{e}^{-\lambda/N})} \geqslant \frac{N}{2\lambda}.$$

*b)* Montrer que pour tout $N \geqslant N_0$

$$\widetilde{a}_{N-1} \geqslant \frac{1}{2\lambda} - \mu\mathrm{e}^{-\lambda}\left(1 + \frac{1}{N} + \mathrm{e}^{-\lambda/N}\frac{1}{N(1-\mathrm{e}^{-\lambda/N})}\right).$$

*c)* Déterminer en fonction de $\lambda$ la limite, quand $N$ tend vers l'infini, du membre de droite dans l'inégalité précédente.

*d)* Montrer qu'il existe un réel $\lambda > 0$ tel que cette limite soit strictement positive.

**II.D.3)** Conclure qu'il existe un réel $\nu > 0$ tel qu'à partir d'un certain rang on ait $\widetilde{a}_n \geqslant \nu$.