Exercice 2

1. La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue (donc continue par morceaux) sur $\mathbb{R}$ et au voisinage de $+\infty$, $0 \leqslant e^{-t^2} = o(1/t^2)$ par croissances comparées.

Or $t \mapsto 1/t^2$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ par critère de Riemann à distance infinie (2>1) et par théorème de comparaison d'intégrales de fonctions positives, $\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t \text{ est convergente.}}$

2. **a.** Concernant la fonction f : ce n'est pas une intégrale à paramètre.

La fonction $u : t \mapsto e^{-t^2}$ est définie, continue sur $\mathbb{R}^+$. Par le théorème fondamental de l'analyse, u admet des primitives et f est la primitive de u qui s'annule en 0.

Donc f est dérivable et $f' = u$ est continue, ainsi, $\boxed{f \text{ est de classe } C^1.}$

Concernant la fonction g : c'est une intégrale à paramètre.

La fonction $v : (x,t) \mapsto \dfrac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$ est définie sur $\mathbb{R}^+ \times [0,1]$.

Elle admet une dérivée partielle par rapport à x et $\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,t) = -2x \cdot \dfrac{1+t^2}{1+t^2} e^{-x^2(1+t^2)} = -2xe^{-x^2(1+t^2)}$.

— pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$ est continue sur le segment $[0,1]$, donc intégrable sur $[0,1]$.

— pour tout $t \in [0,1]$, la fonction $x \mapsto -2xe^{-x^2(1+t^2)}$ est continue par théorèmes opératoires sur les fonctions continues.

— pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, la fonction $t \mapsto -2xe^{-x^2(1+t^2)}$ est continue par morceaux.

— pour tout $[a,b] \subset \mathbb{R}_+$, pour tout $x \in [a,b]$ et $t \in [0,1]$,

$$|v(x,t)| = |-2xe^{-x^2(1+t^2)}| \leqslant 2b = \phi(t)$$

et la fonction $\phi : t \mapsto 2b$ ne dépend plus de la variable x et est intégrable sur le segment $[0,1]$.

Par le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, la fonction $\boxed{g \text{ est de classe } C^1}$ et

$$\boxed{g'(x) = \int_0^1 -2xe^{-x^2(1+t^2)}\mathrm{d}t = -2xe^{-x^2}\int_0^1 e^{-(tx)^2}\mathrm{d}t.}$$

b. On effectue le changement de variables $t = x \cdot u$ qui est affine donc C^1 et **bijectif car** $x > 0$.

Alors $\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t = \int_0^1 xe^{-(xu)^2}\mathrm{d}u$.

Posons alors $\phi(x) = f^2(x) + g(x)$. La fonction ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ par théorème opératoires sur les fonctions dérivables et $\forall x \in \mathbb{R}_+, \phi'(x) = 2f'(x)f(x) + g'(x) = 2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t - 2xe^{-x^2}\int_0^1 e^{-(tx)^2}\mathrm{d}t$.

D'après ce qui précède, $\phi'(x) = 2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t - 2e^{-x^2}\int_0^x e^{-(t)^2}\mathrm{d}t = 0$.

ϕ a donc une dérivée nulle sur **l'intervalle** $\mathbb{R}_+$, donc elle est constante sur $\mathbb{R}_+$.

Or $\phi(0) = \int_0^1 \dfrac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = [\arctan(t)]_0^1 = \arctan(1) - \arctan(0)$.

$$\boxed{\text{Finalement } f^2 + g = \frac{\pi}{4} \text{ sur } \mathbb{R}_+.}$$

c. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$, $(1+t^2)x^2 \geqslant x^2$ donc $-(1+t^2)x^2 \leqslant -x^2$ et par croissance de la fonction exponentielle, $e^{-(1+t^2)x^2} \leqslant e^{-x^2}$ donc $0 \leqslant \dfrac{e^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2} \leqslant e^{-x^2}$.

d. Par croissance de l'intégrale, $0 \leqslant g(x) \leqslant \int_0^1 e^{-x^2} \mathrm{d}t = e^{-x^2}$.

Donc lorsque x tend vers $+\infty$, par théorème des gendarmes, $g(x)$ tend vers 0 et d'après la question précédente, $f^2(x)$ tend vers $\dfrac{\pi}{4}$.

De plus, I est positive par intégrale de fonction positive, donc $I = \lim_{x\to+\infty} f(x)$ existe et est égale à $\boxed{I = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}.}$

Exercice 3

1) Soit $r > 0$. La suite $(r^n/(3n+1))$ est bornée si et seulement si $r \leqslant 1$ par croissances comparées.
Donc le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{(-x)^n}{3n+1}$ est égal à 1.
On pouvait aussi appliquer la règle de d'Alembert :
Comme $\frac{3n+4}{3n+1} \to 1$ *on en déduit que* $R = 1$.

2) a) On a

$$\int_0^1 t^{3n}\, dt = \frac{1}{3n+1}$$

b) On fixe $x \in]-1, 1[$ et on pose pour $t \in [0, 1]$,

$$u_n(t) = (-x)^n t^{3n}$$

Les fonctions u_n sont continues par morceaux, et la série converge simplement avec pour somme

$$s(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n t^{3n} = \frac{1}{1+xt^3}$$

s est bien continue sur $[0, 1]$.

Reste vérifier l'hypothèse de domination.

Pour tout naturel N

$$\left|\sum_{n=0}^{N} u_n(t)\right| = \left|\frac{1-(-xt^3)^{N+1}}{1+xt^3}\right| \leqslant \frac{2}{1+xt^3}$$

qui est bien une fonction continue par morceaux et intégrable sur $[0, 1]$ (puisqu'elle y est continue).

On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée et on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 u_n(t) = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)$$

donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{3n+1} = \int_0^1 \frac{dt}{1+xt^3}$$

Reste calculer l'intégrale...

On pose $a = \sqrt[3]{x}$ et on décompose en éléments simples

$$\frac{1}{1+xt^3} = \frac{1}{3}\frac{1}{1+at} - \frac{1}{6a}\frac{2a^2t-1}{1-at+a^2t^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{\left(at-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

et donc

$$\int_0^1 \frac{dt}{1+xt^3} = \frac{1}{3a}\ln(1+a) - \frac{1}{6a}\ln(1-a+a^2) + \sqrt{3}(\arctan(\frac{\sqrt{3}}{3}(2a-1)) + \frac{\pi}{6})$$

3) La série

$$\sum \frac{(-1)^n}{3n+1}$$

est convergente par le théorème spécial des séries alternées.

Soient alors $f_n(x) = \dfrac{(-x)^n}{3n+1}$ et $f(x) = \sum f_n(x)$ la limte simple de la série de fonction $\sum f_n$ sur l'intervalle $[0,1]$ (1 inclus).
Alors pour tout $x \in [0,1]$ la série $\sum \dfrac{(-x)^n}{3n+1}$ est aussi alternée donc on peut majorer son reste en module par $\dfrac{x^{n+1}}{3n+4}$ donc par $\dfrac{1}{3n+4}$.

Ainsi $|| \sum_{n \leqslant N} f_n - f||_\infty = ||R_N||_\infty = || \sum_{n \geqslant N+1} f_n||_\infty \leqslant \dfrac{1}{3N+4} \longrightarrow 0$ lorsque N tend vers $+\infty$.
Autrement dit, la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.
Comme toutes les fonctions f_n sont continues sur $[0,1]$, la fonction f est aussi continue, donc la valeur en 1 est la limite de la valeur trouvée à la question 2), c'est à dire :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \lim_{x \to 1} \int_0^1 \frac{dt}{1+xt^3} = \frac{\ln 2}{3} + \frac{\pi\sqrt{3}}{9}$$