Exercice 2 :

1. Justifier que la fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
Dans la suite de cet exercice, on se propose de calculer :

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

2. Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt \text{ et } g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt.$$

a. Démontrer que les fonctions f et g sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ et déterminer leur dérivée.

b. Prouver que pour tout x réel positif, on a : $f(x) = \displaystyle\int_0^1 xe^{-x^2t^2} dt$.

En déduire que la fonction $\varphi = g + f^2$ est constante de valeur $\dfrac{\pi}{4}$.

c. Démontrer que pour tout $x \geq 0$ réel, on a : $0 \leq g(x) \leq e^{-x^2}$.

d. En déduire la valeur de I.

Exercice 3 :

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\displaystyle\sum \frac{(-x)^n}{3n+1}$

2. **a.** Calculer pour n entier naturel la valeur de

$$\int_0^1 t^{3n} \, dt$$

b. En déduire, en justifiant avec soin la permutation des symboles Σ et $\int$, la valeur de la somme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{3n+1}$$

lorsque $x \in]-R, R[$.
Il pourra être utile pour les calculs de poser $a = \sqrt[3]{x}$.

3. Montrer que la série

$$\sum \frac{(-1)^n}{3n+1}$$

est convergente et calculer sa somme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}.$$