Sujet de révisions lundi 4 mai
Traiter les questions 1 à 8 de la partie I
Ceux qui ont fini rapidement peuvent chercher la partie II.

On note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière d'un réel x. On rappelle qu'un nombre entier naturel, au moins égal à 2, est dit premier s'il n'est divisible que par 1 et lui même (donc 1 n'est pas premier).

On note $\mathcal{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$ l'ensemble des nombres premiers. On rappelle aussi que tout entier naturel n, au moins égal à 2, se décompose, de façon unique à l'ordre des facteurs près, comme produit de nombres premiers c'est-à-dire qu'il existe $r \in \mathbb{N}^*$, $(p_1, \dots, p_r) \in \mathcal{P}^r$ et $(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \in (\mathbb{N}^*)^r$ tels que

$$n = \prod_{k=1}^{r} p_k^{\alpha_k}$$

Si a et b sont deux entiers naturels tels que $a \leq b$, la notation $\sum\limits_{\substack{a \leq p \leq b \\ p \in \mathcal{P}}} \alpha_p$ désigne la somme des nombres α_p pour tous les entiers **premiers** p de l'intervalle entier $[\![a, b]\!]$. On définit de la même façon $\sum\limits_{\substack{p \leq b \\ p \in \mathcal{P}}} \alpha_p$, $\prod\limits_{\substack{a \leq p \leq b \\ p \in \mathcal{P}}} \alpha_p$ etc.

Par exemple, $\sum\limits_{\substack{4 \leq p \leq 10 \\ p \in \mathcal{P}}} \alpha_p = \alpha_5 + \alpha_7$ ou $\prod\limits_{\substack{p \leq 8 \\ p \in \mathcal{P}}} \alpha_p = \alpha_2 \times \alpha_3 \times \alpha_5 \times \alpha_7$.

Partie I. Préliminaires

On établit, dans cette partie, quelques résultats préliminaires, indépendants les uns des autres, qui seront utilisés par la suite.

1. Soit $n_0 \in \mathbb{N}^*$ et f une fonction continue, décroissante et positive de $[n_0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.
   On pose, pour tout entier naturel n non nul, $S_n = \sum\limits_{k=n_0}^{n} f(k)$.
   (a) Montrer que la suite $(\gamma_n)_{n \geq n_0}$ de terme général $\gamma_n = S_n - \int_{n_0}^{n} f(t)\, dt$ est monotone et convergente.
   (b) En déduire l'existence d'un réel, noté C, pour lequel on a, lorsque l'entier n tend vers $+\infty$:
   $$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln(k)} = \ln(\ln(n)) + C + o(1)$$
   (c) Etablir la convergence de l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t \ln^2(t)}\, dt$ et en déduire la convergence de la série $\sum \frac{1}{k \ln^2(k)}$.
2. Montrer que la série de terme général $\frac{\ln(k)}{k(k-1)}$ est convergente.
   On note $K = \sum\limits_{k=2}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{k(k-1)}$ *sa somme.*
3. (a) Prouver, pour tout entier naturel n au moins égal à 2, l'inégalité :
   $$\sum_{k=2}^{n} \ln(k) \geq n \ln(n) - n + 1$$
   (b) En déduire, quand n tend vers $+\infty$, l'estimation : $\ln(n!) = n \ln(n) + O(n)$.

4. (a) Soit λ un réel strictement positif. Justifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'existence et l'unicité d'un réel $x > 0$ tel que $x\ln(x) - \lambda x = \ln(n)$. On note r_n cet unique réel.
   (b) i. En utilisant le théorème de la bijection, montrer rigoureusement que $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = +\infty$.
      ii. En déduire rigoureusement que $r_n \ln(r_n) \sim \ln(n)$, puis que $\ln(r_n) \sim \ln(\ln(n))$.
      iii. Établir enfin l'équivalence $r_n \sim \frac{\ln(n)}{\ln(\ln(n))}$.
5. On note, pour toute partie E de $\mathbb{N}^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, E_n l'ensemble des éléments de E inférieurs ou égaux à n, c'est à dire que $E_n = E \cap [\![1, n]\!]$, et l'on pose $d_n(E) = \frac{1}{n}\text{Card}(E_n)$.
   Si la suite $(d_n(E))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge, on note $d(E)$ sa limite et on dit que la partie E de $\mathbb{N}^*$ admet une densité égale à $d(E)$.
   (a) Montrer que les ensembles suivants possèdent une densité dont on donnera la valeur.
      i. Une partie finie F de $\mathbb{N}^*$.
      ii. L'ensemble $a\mathbb{N}^* := \{ka/\ k \in \mathbb{N}^*\}$ des multiples non nuls de l'entier $a \in \mathbb{N}^*$.
      iii. L'ensemble $C := \{k^2/\ k \in \mathbb{N}^*\}$ des entiers non nuls qui sont des carrés.
   (b) Soient E_1, E_2 des parties **disjointes** de $\mathbb{N}^*$ possédant une densité. Les parties $\mathbb{N}^* \setminus E_1$ et $E_1 \cup E_2$ possèdent-elles une densité ? Et si oui, que valent-elles ?
   (c) L'application d est-elle une probabilité sur l'ensemble $\mathbb{N}^*$ muni de la tribu formée de toutes ses parties ?
6. (a) Monter par récurrence que pour tout entier naturel m non nul : $2\binom{2m+1}{m} \leq 2^{2m+1}$.
   (b) i. Montrer que, pour tout entier naturel r non nul, si p est un nombre premier compris entre $r+2$ et $2r+1$, alors p divise l'entier $\binom{2r+1}{r}$.
      ii. En déduire que $\prod\limits_{\substack{r+1<p\leq 2r+1\\ p\in\mathcal{P}}} p$ divise l'entier $\binom{2r+1}{r}$ (le produit s'effectuant donc sur tous les entiers **premiers** de $[\![r+2, 2r+1]\!]$).
   (c) Etablir, pour tout entier n au moins égal à 2, l'inégalité $\prod\limits_{\substack{p\leq n\\ p\in\mathcal{P}}} p \leq 4^n$ (le produit s'effectuant donc sur tous les entiers **premiers** au plus égaux à n).
   On raisonnera par récurrence forte et, ayant supposé l'inégalité vraie jusqu'au rang n, on examinera, en particulier, le cas où $n+1$ est un entier premier égal à $2r+1$.
   On en déduit ainsi l'inégalité $\sum\limits_{\substack{p\leq n\\ p\in\mathcal{P}}} \ln(p) \leq n\ln(4)$.
7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note, pour tout nombre premier p et tout entier $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$, $v_p(r)$ l'exposant de p dans la décomposition en nombres premiers de r, et on pose $v_p(1) = 0$.
   Par exemple, puisque $300 = 2^2 \times 3 \times 5^2$, $v_2(300) = 2$, $v_3(300) = 1$, $v_5(300) = 2$ et $v_p(300) = 1$ pour $p \notin \{2, 3, 5\}$.
   Soit p un nombre premier. On note, pour tout entier naturel k non nul, α_k (rep. β_k) le nombre d'entiers $d \in [\![1, n]\!]$ tels que p^k divise d (resp. tel que $v_p(d) = k$).
   Bien sûr, dès que k est assez grand, $\alpha_k = \beta_k = 0$.
   En cas de difficulté, il est conseillé de prendre le temps de tester les égalités/inégalités suivantes sur des exemples concrets...
   (a) Prouver, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'égalité $\alpha_k = \lfloor \frac{n}{p^k} \rfloor$.
   (b) Justifier l'égalité $v_p(n!) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} k\beta_k$.
   (c) En déduire, en reliant β_k aux α_i, l'égalité $v_p(n!) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \lfloor \frac{n}{p^k} \rfloor$.
   (d) En déduire l'encadrement : $\frac{n}{p} - 1 \leq v_p(n!) \leq \frac{n}{p-1} (= \frac{n}{p} + \frac{n}{p(p-1)})$.

8. Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites réelles. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.
   Prouver, pour tout entier $n \geq 2$, l'égalité

$$\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k a_k = \sum_{k=1}^{n-1} (\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}) A_k + \varepsilon_n A_n$$

9. Soit $(a_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ une suite positive de limite $+\infty$ et $(b_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ une suite bornée. Soit $(X_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires discrètes, toutes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$. On suppose que, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}(X_N) = a_N + b_N$ et, quand N tend vers $+\infty$, $\mathbb{V}(X_N) = O(a_N)$.
   (a) Justifier, pour tout entier N assez grand, l'inclusion entre événements

$$\left[|X_N - \mathbb{E}(X_N)| \leq \frac{1}{2} a_N^{2/3}\right] \subset \left[|X_N - a_N| \leq a_N^{2/3}\right]$$

   (b) En déduire que

$$\lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}(|X_N - a_N| > a_N^{2/3}) = 0$$

Partie II. Deux résultats asymptotiques

1. (a) Etablir, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité : $\ln(n!) = \sum_{\substack{p\leq n \\ p\in\mathcal{P}}} v_p(n!) \ln(p)$.
   (b) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, l'encadrement :

$$\frac{\ln(n!)}{n} - K \leq \sum_{\substack{p\leq n \\ p\in\mathcal{P}}} \frac{\ln(p)}{p} \leq \frac{\ln(n!)}{n} + \ln(4)$$

   où le réel K est défini dans la question **I**.2).
   (c) Conclure, quand l'entier n tend vers $+\infty$, à l'évaluation asymptotique

$$\sum_{\substack{p\leq n \\ p\in\mathcal{P}}} \frac{\ln(p)}{p} = \ln(n) + O(1)$$

2. On note χ l'application qui, à chaque entier $k \in \mathbb{N}^*$, associe 1 si k est premier (i.e. $k \in \mathcal{P}$) et 0 sinon.
   (a) En posant, pour tout entier naturel k non nul, $a_k = \chi(k)\frac{\ln(k)}{k}$, $A_k = \sum_{i=1}^{k} a_i$, en utilisant **I**.8), établir, pour tout $n \geq 2$, l'égalité :

$$\sum_{\substack{p\leq n \\ n\in\mathcal{P}}} \frac{1}{p} = \sum_{k=2}^{n-1} \frac{\ln(1+1/k)}{\ln(k)\ln(k+1)} A_k + \frac{A_n}{\ln(n)}$$

   (b) Etablir, quand l'entier k tend vers $+\infty$, l'égalité :

$$\frac{\ln(1+1/k)}{\ln(k)\ln(k+1)} A_k = \frac{1}{k\ln(k)} + O\left(\frac{1}{k\ln^2(k)}\right)$$

   (c) En déduire, quand l'entier n tend vers $+\infty$, l'égalité :

$$\sum_{\substack{p\leq n \\ p\in\mathcal{P}}} \frac{1}{p} = \ln(\ln(n)) + O(1)$$

Partie III.

On note, pour tout entier naturel n non nul, $\omega(n)$ le nombre d'entiers **premiers** distincts qui divisent l'entier n. On a donc $\omega(2^5) = 1$, $\omega(2^2 \cdot 5^3) = 2$, $\omega(2 \cdot 5^2 \cdot 11^5) = 3$ etc.

L'objet de la suite du problème est le contrôle asymptotique, en un certain sens, de la suite $(\omega(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$.

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, dont la décomposition en nombres premiers est $n = \prod_{k=1}^{r} p_k^{\alpha_k}$.
   On a donc $\omega(n) = r$.
   Prouver l'inégalité : $\omega(n) = r \leq \frac{\ln(n)}{\ln(2)}$.

   (b) A l'aide de **I**.4), prouver la domination : $\omega(n) = O(\frac{\ln(n)}{\ln(\ln(n))})$.

   On observera que $n \geq 2\prod_{k=1}^{r-1}(2k+1)$ *puis on prouvera, pour un réel* λ *qu'on déterminera, l'inégalité :* $\ln(n) \geq (r-1)\ln(r-1) - \lambda(r-1)$.

2. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On munit l'ensemble $[\![1, N]\!]$ de la probabilité uniforme et, pour tout $r \in [\![1, N]\!]$, on note $X_{N,r}$ la variable aléatoire suivante :

$$X_{N,r} : \begin{array}{ccc} [\![1, N]\!] & \to & \mathbb{R} \\ d & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } r \text{ divise } d \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

   et on note $X_N = \sum_{\substack{p\leq N \\ p\in\mathcal{P}}} X_{N,p}$ (on effectue donc la somme sur tout les entiers p **premiers** de $[\![1, N]\!]$).
   On a donc, pour tout $n \in [\![1, N]\!]$, $X_N(n) = \omega(n)$.
   On note $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{V}(Y)$ l'espérance et la variance d'une variable aléatoire Y sur l'espace précédent (elles dépendent, bien sûr, de l'entier N).

   (a) Vérifier, pour tout $r \in [\![1, N]\!]$, l'égalité : $\mathbb{E}(X_{N,r}) = \frac{1}{N}\lfloor \frac{N}{r} \rfloor$.

   (b) Prouver l'égalité : $\mathbb{E}(X_N^2) = \mathbb{E}(X_N) + \sum_{\substack{1\leq p,q\leq N \\ (p,q)\in\mathcal{P}^2, p\neq q}} \frac{1}{N}\lfloor \frac{N}{pq} \rfloor$.

   (c) En déduire, quand l'entier N tend vers $+\infty$, l'ordre de grandeur : $\mathbb{V}(X_N) = O(\ln(\ln(N)))$.

   (d) En déduire, à l'aide d'un résultat de la **partie I**, le résultat :

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N}\mathrm{Card}\{n \in [\![1, N]\!],\ |\omega(n) - \ln(\ln(N))| > (\ln(\ln(N)))^{2/3}\} = 0$$

   Ainsi, en examinant le cas où $N = 10^{99}$, *on peut s'attendre à ce que, "le plus souvent", un entier d'au plus* 100 *chiffres, possède entre 3 et 8 facteurs premiers distincts. Etonnant non ?*