BECEAS MP21 2018
Un corrigé

Partie I. Préliminaires

1. (a) C'est le théorème de comparaison séries/intégrales : comme f est continue par morceaux, décroissante à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, la série de terme général $(f(n)-\int_{n-1}^{n} f(t)\,dt)$ est convergente, c'est à dire que la suite des sommes partielles :
$\boxed{(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}} = (S_n - \int_{n_0}^{n} f)_{n\in\mathbb{N}} \text{ (par relation de Chasles) est convergente.}}$
On peut aussi le (re)démontrer :
Par relation de Chasles, on a

$$\gamma_{n+1} - \gamma_n = f(n+1) - \int_n^{n+1} f(t)\,dt$$

Or par décroissance de f sur $[n, n+1]$ (pour $n \geq n_0$), $\forall t \in [n, n+1],\ f(t) \geq f(n+1)$. En intégrant cette relation, on obtient que

$$\forall n \geq n_0,\ \gamma_{n+1} - \gamma_n \leq 0$$

et ainsi $\boxed{\textit{la suite } (\gamma_n) \textit{ décroît}}$.
Par ailleurs, le même argument de décroissance donne

$$\forall k \geq n_0,\ \int_k^{k+1} f(t)\,dt \leq f(k)$$

En sommant ces relations pour $k = n_0, \dots, n-1$, on a donc

$$\int_{n_0}^{n} f(t)\,dt \leq S_{n-1} = S_n - f(n+1)$$

On en déduit que $\gamma_n \geq f(n+1) \geq 0$ et (γ_n) est minorée (par 0). Par théorème de limite monotone, $\boxed{(\gamma_n) \textit{ converge}}$.

(b) La fonction $x \mapsto \frac{1}{x\ln(x)}$ est de classe C^1 sur $[2, +\infty[$ de dérivée $x \mapsto -\frac{1+\ln(x)}{(x\ln(x))^2}$. Cette fonction est décroissante sur $[2, +\infty[$ (dérivée négative). Comme elle est positive, on peut lui appliquer la question précédente. On note

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} - \int_2^n \frac{dt}{t\ln(t)} \right)$$

On a ainsi

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} = \int_2^n \frac{dt}{t\ln(t)} + \ell + o(1)$$

Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x\ln(x)}$ est $x \mapsto \ln(\ln(x))$ sur $[2, +\infty[$ et ainsi

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} = \ln(\ln(n)) + \ell - \ln(\ln(2)) + o(1)$$

En notant $C = \ell - \ln(\ln(2))$, on a donc

$$\boxed{\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} = \ln(\ln(n)) + C + o(1)}$$

(c) $t \mapsto \frac{1}{t\ln^2(t)}$ est continue sur $[2,+\infty[$ et une primitive en est $-\frac{1}{\ln(t)}$. Cette primitive admet une limite finie en $+\infty$ (nulle) et ainsi

$$\boxed{\int_2^{+\infty} \frac{1}{t\ln^2(t)}\, dt \text{ converge}}$$

$t \mapsto \frac{1}{t\ln^2(t)}$ est décroissante sur $[2,+\infty[$ (produit de fonctions décroissantes positives sur ce domaine) et positive. On peut lui appliquer 1(a). Avec la convergence de l'intégrale, on a convergence de la suite de terme général $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k\ln^2(k)}$ c'est à dire que

$$\boxed{\sum \frac{1}{k\ln^2(k)} \text{ converge}}$$

2. $\frac{\ln(k)}{k(k-1)} = o(\frac{1}{k^{3/2}})$ est le terme général d'une série absolument convergente (comparaison aux séries de Riemann) et donc convergente ($\mathbb{R}$ de dimension finie).

$$\boxed{\text{La série de terme général } \frac{\ln(k)}{k(k-1)} \text{ est convergente}}$$

3. (a) ln étant croissante sur $[1,+\infty[$, on a

$$\forall k \geq 2,\ \int_{k-1}^k \ln(t)\, dt \leq \ln(k)$$

En sommant ces relations, on a donc

$$\forall n \geq 2,\ \int_1^n \ln(t)\, dt \leq \sum_{k=2}^n \ln(k)$$

Comme $x \mapsto x\ln(x) - x$ est une primitive de ln sur $\mathbb{R}^{+*}$, on en déduit que

$$\boxed{\forall n \geq 2,\ \sum_{k=2}^n \ln(k) \geq n\ln(n) - n + 1}$$

(b) Par propriéte de morphisme de ln, le membre de gauche ci dessus vaut $\ln(n!)$. Ce terme est clairement majoré par $n\ln(n)$ et donc

$$n\ln(n) - n + 1 \leq \ln(n!) \leq n\ln(n)$$

$\frac{\ln(n!) - n\ln(n)}{n}$ reste ainsi dans $[-1,0]$ et est donc bornée ; ce qui donne

$$\boxed{\ln(n!) = n\ln(n) + O(n)}$$

4. (a) Notons $g\ :\ x \mapsto x\ln(x) - \lambda x$. g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$ et

$$\forall x > 0,\ g'(x) = 1 + \ln(x) - \lambda$$

g est donc décroissante sur $]0, e^{\lambda-1}]$ puis croissante ensuite (et même strictement). Comme g est de limite nulle en 0 (croissances comparées), elle est strictement négative sur le premier intervalle. Par théorème de la bijection, elle réalise une bijection de $[e^{\lambda-1},+\infty[$ dans $[g(e^{\lambda-1}),+\infty[$ qui contient $\mathbb{R}^+$ (puisque $g(e^{\lambda-1}) < 0$).
Finalement, tout élement de $\mathbb{R}^+$ admet un unique antécédent par g dans $\mathbb{R}^{+*}$ et en particulier,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists ! r_n > 0 /\ r_n\ln(r_n) - \lambda r_n = \ln(n)}$$

(b) Avec les notations précédentes, $r_n = g^{-1}(\ln(n))$ (en identifiant g et sa restriction à $[e^{\lambda-1}, +\infty[$).
Comme g est de limite infinie en $+\infty$, il en est de même de g^{-1} et ainsi $\boxed{r_n \to +\infty}$.
En particulier, $\lambda r_n = o(r_n \ln(r_n))$ et avec la relation vérifiée par r_n, $r_n \ln(r_n) \sim \ln(n)$ c'est-à-dire $r_n \ln(r_n) = \ln(n) + o(\ln(n))$. On a alors

$$\ln(r_n \ln(r_n)) = \ln(\ln(n)) + \ln(1 + o(1)) \sim \ln(\ln(n))$$

Comme $\ln(r_n \ln(r_n)) = \ln(r_n) + \ln(\ln(r_n)) \sim \ln(r_n)$ (car $r_n \to +\infty$), on conclut que $\ln(r_n) \sim \ln(\ln(n))$.
En mettant ensemble les deux équivalents trouvés,

$$\boxed{r_n \sim \frac{\ln(n)}{\ln(\ln(n))}}$$

5. (a) Notons p le cardinal de la partie finie F. Comme $F_n \subset F$, on a $0 \leq d_n(F) \leq \frac{p}{n} \to 0$. Ainsi

$$\boxed{\text{Toute partie finie est de densité nulle}}$$

Soit $a \in \mathbb{N}^*$. Les multiples de a dans $[\![1, n]\!]$ sont les éléments qui s'écrivent ka avec $1 \leq ka \leq n$. Il y en a autant que d'entiers k entre $\frac{1}{a}$ et $\frac{n}{a}$ et comme $a \geq 1$, autant que d'entiers entre 1 et $\frac{n}{a}$. Il y en a donc $\lfloor n/a \rfloor$. Ainsi

$$\frac{n/a - 1}{n} \leq d_n(a\mathbb{N}^*) = \frac{\lfloor n/a \rfloor}{n} \leq \frac{n/a}{n}$$

Par théorème d'encadrement

$$\boxed{a\mathbb{N}^* \text{ a une densité égale à } 1/a}$$

Entre 1 et n, il y a au plus $\sqrt{n}$ carrés. Ainsi $0 \leq d_n(C) \leq \frac{\sqrt{n}}{n}$. On conclut que

$$\boxed{\text{L'ensemble des carrés d'entiers est de densité nulle}}$$

(b) Posons $F_1 = \mathbb{N}^* \setminus E_1$. $\mathrm{Card}(F_1 \cap [\![1, n]\!]) = n - \mathrm{Card}(E_1 \cap [\![1, n]\!])$ et donc $d_n(F_1) = 1 - d_n(E_1)$.
On en conclut que

$$\boxed{\mathbb{N}^* \setminus E_1 \text{ est de densité } 1 - d(E_1)}$$

On a $(E_1 \cup E_2) \cap [\![1, n]\!] = (E_1 \cap [\![1, n]\!]) \cup (E_2 \cap [\![1, n]\!])$ et c'est une réunion disjointe. Ainsi, $d_n(E_1 \cup E_2) = d_n(E_1) + d_n(E_2)$.

$$\boxed{E_1 \cup E_2 \text{ est de densité } d(E_1) + d(E_2)}$$

(c) On a deux propriétés à vérifier.
On vient de voir (exemple 2 avec $a = 1$) que $d(\mathbb{N}) = 1$.
On s'interroge sur la σ-additivité et on se donne une suite $(E_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de parties disjointes de $\mathbb{N}$.
En itérant un résultat de la question précédente, on a $d(E_1 \cup \cdots \cup E_k) = d(E_1) + \cdots + d(E_k)$ pour tout k. On veut la même propriété avec la somme infinie. Ceci n'a pas lieu. En effet, il suffit de considérer les singletons $E_i = \{i + 1\}$. Leur réunion est égale à $\mathbb{N}^*$ et de densité 1 mais la somme des densités vaut 0.

$$\boxed{d \text{ n'est pas une probabilité sur } (\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))}$$

6. (a) On peut procéder par récurrence sur m.
<u>Initialisation</u> : $2\binom{3}{1} = 6 \leq 2^3$ et le résultat est vrai pour $m = 1$.
<u>Hérédité</u> : supposons le résultat vrai jusqu'à un rang m. On a

$$\binom{2m+3}{m+1} = \binom{2m+1}{m} \frac{(2m+3)(2m+2)}{(m+1)(m+2)} = 2\binom{2m+1}{m} \frac{2m+3}{m+2} \leq 4\binom{2m+1}{m}$$

Le résultat au rang m donne alors celui au rang $m + 1$.

$$\boxed{\forall m \in \mathbb{N}^*,\ 2\binom{2m+1}{m} \leq 2^{2m+1}}$$

(b) On a

$$K = \binom{2r+1}{r} = \frac{(2r+1)(2r)\dots(r+2)}{r(r-1)\dots 1} = \frac{N}{D}$$

Soit p un nombre premier plus grand que $r+2$. Il ne divise aucun des facteurs du dénominateur et ne divise donc pas le produit (un nombre premier divise un produit ssi il divise l'un des termes de ce produit). p étant un nombre premier, il est premier avec ce dénominateur D. Par ailleurs, si p est en plus $\leq 2r+1$, ce nombre premier est l'un des facteurs de N et donc p divise $N = KD$. Par lemme de Gauss, il divise donc K.

On vient de voir que tous les nombres premiers entre $r+2$ et $2r+1$ divisent K et il en est donc de même du produit (chacun de ces nombres premiers intervient dans la décomposition de K).

$$\boxed{\prod_{\substack{r+1<p\leq 2r+1\\ p\in\mathcal{P}}} p \ \text{ divise } \binom{2r+1}{r}}$$

(c) On procède, comme proposé, par récurrence sur n.

<u>Initialisation</u> : le résultat est vrai pour $n = 2$ ($2 \leq 4^2$).

<u>Hérédité</u> : on suppose le résultat vrai jusqu'à un rang $n \geq 2$ et on distingue deux cas.

• si $n+1$ n'est pas premier, le produit est le même aux rangs n et $n+1$ et l'inégalité au rang $n+1$ est immédiate ($4^n \leq 4^{n+1}$).

• si $n+1$ est premier alors, comme il est plus grand que 2, c'est un nombre impair qui s'écrit $n+1 = 2r+1$ avec $r \geq 1$. On a

$$\prod_{\substack{p\leq n+1\\ p\in\mathcal{P}}} p = \prod_{\substack{p\leq r+1\\ p\in\mathcal{P}}} p \prod_{\substack{r+1<p\leq n\\ p\in\mathcal{P}}} p$$

Le premier produit du membre de droite est majoré par 4^{r+1} par hypothèse de récurrence ($2 \leq r+1 \leq n$). Le second divise $\binom{2r+1}{r}$ et est inférieur à cet entier et donc aussi à 2^{2r} (question 6(a)). Finalement,

$$\prod_{\substack{p\leq n+1\\ p\in\mathcal{P}}} p \leq 4^{r+1} \times 2^{2r} = 4^{2r+1} = 4^{n+1}$$

ce qui donne le résultat au rang $n+1$.

$$\boxed{\forall n \geq 2, \prod_{\substack{p\leq n\\ p\in\mathcal{P}}} p \leq 4^n}$$

7. (a) Il y a autant d'entiers $d \in [\![1, n]\!]$ tels que p^k divise d que d'entiers naturels a tels que $ap^k \in [\![1, n]\!]$ i.e. tels que $1/p^k \leq a \leq n/p^k$. Comme $0 < 1/p^k \leq 1$, ceci revient à $1 \leq a \leq n/p^k$. Il y a $\lfloor n/p^k \rfloor$ tels choix. Ainsi

$$\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N}^*, \text{ l'égalité } \alpha_k = \lfloor \tfrac{n}{p^k} \rfloor}$$

(b) Par unicité de la décomposition en produit de nombres premiers, on a $v_p(ab) = v_p(a)+v_p(b)$. On en déduit que

$$v_p(n!) = \sum_{q=1}^{n} v_p(q)$$

Dans cette somme, on regroupe les termes selon la valeur k de $v_p(q)$ (k non nul car sinon la contribution du terme est nulle)

$$v_p(n!) = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{\substack{q \in \mathbb{N}^* \\ v_p(q)=k}} v_p(q)$$

Dans la somme intérieure, il y a β_k termes égaux à k. Ainsi,

$$\boxed{v_p(n!) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\beta_k}$$

(c) p^k divise d si et seulement si $v_p(d) \geq k$ et ainsi (la somme est en fait finie)

$$\alpha_k = \sum_{i=k}^{+\infty} \beta_i$$

ce qui donne aussi

$$\alpha_k - \alpha_{k+1} = \beta_k$$

On en déduit que (les sommes sont en fait finies)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k\beta_k = \sum_{k=1}^{+\infty} k\alpha_k - \sum_{k=1}^{+\infty} k\alpha_{k+1} = \sum_{k=1}^{+\infty} k\alpha_k - \sum_{k=2}^{+\infty} (k-1)\alpha_k = \alpha_1 + \sum_{k=2}^{\infty} \alpha_k = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$$

Avec 7(a), on conclut donc que

$$\boxed{v_p(n!) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor}$$

(d) On sait que $\lfloor x \rfloor \leq x$ et donc (on majore par une somme géométrique finie)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n}{p^k} = n\frac{1/p}{1-1/p} = \frac{n}{p-1}$$

Par ailleurs, la somme est plus grande que le premier terme qui vaut $\lfloor n/p \rfloor \geq n/p - 1$. Ainsi

$$\boxed{\frac{n}{p} - 1 \leq v_p(n!) \leq \frac{n}{p-1} (= \frac{n}{p} + \frac{n}{p(p-1)})}$$

8. *C'est la transformation d'Abel (hors programme, donc à refaire à chaque fois) qui permet entre autre de montrer la convergence de la série* $\sum \frac{\sin n}{n}$
La formule ressemble à la formule d'intégration par parties, mais en version 'discrète'.
On remarque que $a_n = A_n - A_{n-1}$, en convenant que $A_0 = 0$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k a_k &= \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k (A_k - A_{k-1}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k A_k - \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k A_{k-1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k A_k - \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_{k+1} A_k \\
&= \varepsilon_n A_n + \sum_{k=1}^{n-1} (\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}) A_k - \varepsilon_1 A_0
\end{aligned}$$

Comme $A_0 = 0$, on a finalement

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k a_k = \sum_{k=1}^{n-1} (\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}) A_k + \varepsilon_n A_n}$$

9. (a) La suite (b_N) étant bornée et la suite (a_N) étant de limite infinie, $b_N / a_N^{2/3}$ est de limite nulle. Pour N assez grand, on a alors

$$|b_N| \leq \frac{1}{2} a_N^{2/3}$$

On considère un tel N. Par inégalité triangulaire, on a

$$|X_N - a_N| = |X_n - \mathbb{E}(X_n)| + |b_N| \leq |X_n - \mathbb{E}(X_n)| + \frac{1}{2} a_N^{2/3}$$

On en déduit alors que

$$\boxed{\left[|X_N - \mathbb{E}(X_N)| \leq \frac{1}{2} a_N^{2/3}\right] \subset \left[|X_N - a_N| \leq a_N^{2/3}\right]}$$

(b) En passant aux événements contraires,

$$\mathbb{P}(|X_N - a_N| > a_N^{2/3}) \leq \mathbb{P}(|X_N - \mathbb{E}(X_N)| > \frac{1}{2} a_N^{2/3})$$

Par Bienaymé-Tchebychev (on suppose ici que X_N admet un moment d'ordre 2)

$$\mathbb{P}(|X_N - a_N| > a_N^{2/3}) \leq \frac{\mathbb{V}(X_N)}{a_N^{4/3}} = O(\frac{1}{a_N^{1/3}}) \to 0$$

$$\boxed{\lim_{N \to +\infty} \mathbb{P}(|X_N - a_N| > a_N^{2/3}) = 0}$$

Partie II. Deux résultats asymptotiques

1. (a) Un entier N est égal au produit des $p^{v_p(n)}$ pour p variant dans l'ensemble des nombres premiers divisant N. On peut d'ailleurs étendre le produit à d'autre nombres premiers (ce qui revient à multiplier le produit par 1). Il faut juste être sûr de prendre en compte tous les premiers qui divisent N. Or, un premier qui divise N est plus petit que N. Ainsi

$$N = \prod_{\substack{p \leq N \\ p \in \mathcal{P}}} p^{v_p(N)}$$

En appliquant ceci à $N = n!$ et en passant au logarithme, on obtient

$$\boxed{\ln(n!) = \sum_{\substack{p \leq n \\ p \in \mathcal{P}}} v_p(n!) \ln(p)}$$

(b) On utilise tout d'abord la question I.7 pour obtenir un encadrement de $v_p(n!)$ qui avec la question précédente donne

$$\sum_{\substack{p \leq n \\ p \in \mathcal{P}}} \left(\frac{n}{p} - 1\right) \ln(p) \leq \ln(n!) \leq \sum_{\substack{p \leq n \\ p \in \mathcal{P}}} \left(\frac{n}{p} + \frac{n}{p(p-1)}\right) \ln(p)$$

c'est à dire

$$\sum_{\substack{p \leq n \\ p \in \mathcal{P}}} \frac{\ln(p)}{p} - \sum_{\substack{p \leq n \\ p \in \mathcal{P}}} \ln(p) \leq \frac{\ln(n!)}{n} \leq \sum_{\substack{p \leq n \\ p \in \mathcal{P}}} \frac{\ln(p)}{p} + \sum_{\substack{p \leq n \\ p \in \mathcal{P}}} \frac{\ln(p)}{p(p-1)}$$

La seconde somme du membre de droite est majorée par K car les termes de la somme sont positifs.
La seconde somme du membre de gauche est majorée par $\ln(4)$ avec la question I.6.

$$\sum_{\substack{p\leq n\\p\in\mathcal{P}}} \frac{\ln(p)}{p} - \ln(4) \leq \frac{\ln(n!)}{n} \leq \sum_{\substack{p\leq n\\p\in\mathcal{P}}} \frac{\ln(p)}{p} + K$$

On en déduit alors

$$\boxed{\frac{\ln(n!)}{n} - K \leq \sum_{\substack{p\leq n\\p\in\mathcal{P}}} \frac{\ln(p)}{p} \leq \frac{\ln(n!)}{n} + \ln(4)}$$

(c) Avec la question I.3, majorant et minorant ci-dessus sont égaux à $\ln(n)+O(1)$. On a donc immédiatement

$$\boxed{\sum_{\substack{p\leq n\\p\in\mathcal{P}}} \frac{\ln(p)}{p} = \ln(n) + O(1)}$$

2. (a) On utilise la question I.8 avec (a_n) et (ε_n) définie par $\varepsilon_n = 1/\ln(n)$. On obtient alors immédiatement

$$\sum_{\substack{p\leq n\\p\in\mathcal{P}}} \frac{1}{p} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\ln(1+1/k)}{\ln(k)\ln(k+1)} A_k + \frac{A_n}{\ln(n)}$$

Comme $A_1 = 0$, on a alors aussi

$$\boxed{\sum_{\substack{p\leq n\\p\in\mathcal{P}}} \frac{1}{p} = \sum_{k=2}^{n-1} \frac{\ln(1+1/k)}{\ln(k)\ln(k+1)} A_k + \frac{A_n}{\ln(n)}}$$

(b) La question II.1 donne $A_k = \ln(k) + O(1)$. Par ailleurs $\ln(k+1) = \ln(k) + \ln(1+1/k) = \ln(k) + O(1)$ et donc

$$\frac{1}{\ln(k+1)} = \frac{1}{\ln(k)}(1+O(1/\ln(k)))^{-1} = \frac{1}{\ln(k)}(1+O(1/\ln(k))) = \frac{1}{\ln(k)} + O(\frac{1}{\ln^2(k)})$$

et donc

$$\frac{\ln(1+1/k)}{\ln(k)\ln(k+1)} = \frac{1}{\ln(k)}\left(\frac{1}{\ln(k)} + O(\frac{1}{\ln^2(k)})\right)\left(\frac{1}{k} + O(\frac{1}{k^2})\right) = \frac{1}{k\ln^2(k)} + O(\frac{1}{k\ln^3(k)})$$

Ainsi,

$$\frac{\ln(1+1/k)}{\ln(k)\ln(k+1)} A_k = \left(\frac{1}{k\ln^2(k)} + O(\frac{1}{k\ln^3(k)})\right)(\ln(k)+O(1))$$

et on en conclut que

$$\boxed{\frac{\ln(1+1/k)}{\ln(k)\ln(k+1)} A_k = \frac{1}{k\ln(k)} + O(\frac{1}{k\ln^2(k)})}$$

(c) $\frac{\ln(1+1/k)}{\ln(k)\ln(k+1)} A_k - \frac{1}{k\ln(k)}$ est ainsi le terme général d'une série absolument convergente (dominé par le terme général d'une série convergente d'après I.1(c) et positive). On a donc

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{\ln(1+1/k)}{\ln(k)\ln(k+1)} A_k = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} + O(1)$$

Avec I.1(b) on en déduit que

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{\ln(1+1/k)}{\ln(k)\ln(k+1)} A_k = \ln(\ln(n)) + O(1)$$

Avec II.1(c), $A_n = \ln(n) + O(1)$ et donc $\frac{A_n}{\ln(n)} = O(1)$.
Avec II.2(a) on a alors finalement

$$\boxed{\sum_{\substack{p \leq n \\ p \in \mathcal{P}}} \frac{1}{p} = \ln(\ln(n)) + O(1)}$$

Partie III.

1. (a) Tous les nombres premiers sont plus grands que 2 et donc

$$n \geq \prod_{k=1}^{r} 2^{\alpha_k} = 2^{\sum_{k=1}^{r} \alpha_k}$$

En passant au logaritme (opération croissante)

$$\sum_{k=1}^{r} \alpha_k \leq \frac{\ln(n)}{\ln(2)}$$

Comme tout les α_k sont plus grands que 1, on a enfin

$$\boxed{\omega(n) = r \leq \frac{\ln(n)}{\ln(2)}}$$

(b) Les p_k, sauf éventuellement 1, sont des nombres impairs. En les ordonnant, on a $p_1 \geq 2$, $p_2 \geq 3$, ..., $p_r \geq 2r-1$. Comme les α_k sont plus grands que 1, on en déduit que

$$n \geq 2 \prod_{k=2}^{r} (2k-1) = 2 \prod_{k=1}^{r-1} (2k+1)$$

En composant par le logarithme (opération croissante)

$$\ln(n) \geq \ln(2) + \sum_{k=1}^{r-1} \ln(2k+1) \geq \ln(2) + \sum_{k=1}^{r-1} \ln(2k) = r\ln(2) + \sum_{k=1}^{r-1} \ln(k)$$

Avec I.3(a), on en déduit que dans le cas $r \geq 2$,

$$\ln(n) \geq r\ln(2) + (r-1)\ln(r-1) - (r-1) + 1 \geq (r-1)\ln(r-1) - (r-1)$$

On utilise alors I.4(a) avec $\lambda = 1$. La fonction $g : x \mapsto x\ln(x) - \lambda x$ prend une unique fois la valeur $\ln(n)$ en un point r_n. Avant, elle est plus petite que r_n et après elle est plus grande. L'inégalité précédente donne alors $r - 1 \leq r_n$. On a ainsi

$$0 \leq r \leq r_n + 1$$

Cette inégalité reste vraie si $r = 1$.
Avec I.4(b), on conclut que

$$\boxed{\omega(n) = O(\frac{\ln(n)}{\ln(\ln(n))})}$$

2. (a) $X_{N,r}$ est une variable de de Bernouli (elle prend la valeur 0 ou 1) dont le paramètre est

$$p = \mathbb{P}(\{d \in [\![1, N]\!] / \ r|d\}$$

Puisque l'on travaille avec la probabilité uniforme sur $[\![1, N]\!]$, on a

$$p = \frac{1}{N}\text{Card}\{d \in [\![1, N]\!] / \ r|d\}$$

Le cardinal ci-dessus est le nombre d'entiers k tels que $1 \le kr \le N$ et il est égal à $\lfloor \frac{N}{r} \rfloor$. Ainsi, l'espérance d'une variable de Bernouilli de paramètre p valant p,

$$\boxed{\mathbb{E}(X_{N,r}) = \frac{1}{N}\lfloor \frac{N}{r} \rfloor}$$

(b) On a

$$X_N^2 = \sum_{\substack{1 \le p,q \le N \\ p,q \in \mathcal{P}}} X_{N,p}X_{N,q} = \sum_{\substack{1 \le p \le N \\ p \in \mathcal{P}}} X_{N,p}^2 + \sum_{\substack{1 \le p \ne q \le N \\ p,q \in \mathcal{P}}} X_{N,p}X_{N,q}$$

Comme $X_{n,p}$ est à valeurs dans $\{0, 1\}$, elle est égale à son carré.
Si p et q sont deux nombres premiers distincts, p et q divisent d si et seulement si pq divise d. Dans ce cas $X_{N,p}X_{N,q} = X_{n,pq}$.
Avec cela et par linéairité de l'espérance, on a

$$\mathbb{E}(X_N^2) = \sum_{\substack{1 \le p \le N \\ p \in \mathcal{P}}} \mathbb{E}(X_{N,p}) + \sum_{\substack{1 \le p \ne q \le N \\ p,q \in \mathcal{P}}} \mathbb{E}(X_{N,pq})$$

La question précédente donne alors

$$\boxed{\mathbb{E}(X_N^2) = \mathbb{E}(X_N) + \sum_{\substack{1 \le p,q \le N \\ (p,q) \in \mathcal{P}^2, p \ne q}} \frac{1}{N}\lfloor \frac{N}{pq} \rfloor}$$

(c) Par formule de König, $\mathbb{V}(X_N) = \mathbb{E}(X_N^2) - \mathbb{E}(X_N)^2$. Par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}(X_N) = \sum_{\substack{p \le N \\ p \in \mathcal{P}}} \mathbb{E}(X_{N,p}) = \frac{1}{N}\sum_{\substack{p \le N \\ p \in \mathcal{P}}} \lfloor \frac{N}{p} \rfloor$$

Avec l'expression précédente, on a alors

$$\mathbb{E}(X_N)^2 = \frac{1}{N^2}\sum_{\substack{p,q \le N \\ p,q \in \mathcal{P}}} \lfloor \frac{N}{p} \rfloor \lfloor \frac{N}{q} \rfloor$$

En notant $k = \lfloor \frac{N}{pq} \rfloor$, on a $kpq \le N$ et donc $kq \le \lfloor \frac{N}{p} \rfloor$ ce qui montre que $\lfloor \frac{N}{pq} \rfloor \le \frac{1}{q}\lfloor \frac{N}{p} \rfloor$ ou encore que

$$\frac{1}{N}\lfloor \frac{N}{pq} \rfloor \le \frac{1}{N^2}\frac{N}{q}\lfloor \frac{N}{p} \rfloor \le \frac{1}{N^2}\left(1 + \lfloor \frac{N}{q} \rfloor\right)\lfloor \frac{N}{p} \rfloor$$

En sommant, on obtient

$$\sum_{\substack{1 \le p,q \le N \\ (p,q) \in \mathcal{P}^2}} \frac{1}{N}\lfloor \frac{N}{pq} \rfloor \le \mathbb{E}(X_N)^2 + \frac{1}{N^2}\sum_{\substack{1 \le p,q \le N \\ (p,q) \in \mathcal{P}^2}} \lfloor \frac{N}{p} \rfloor \le \mathbb{E}(X_N)^2 + \frac{1}{N}\sum_{\substack{1 \le p \le N \\ p \in \mathcal{P}}} \lfloor \frac{N}{p} \rfloor \le \mathbb{E}(X_N)^2 + \mathbb{E}(X_N)$$

Tout cela mis ensemble donne

$$\mathbb{V}(X_n) \le 2\mathbb{E}(X_N)$$

Comme $\lfloor x \rfloor \leq x$, on a donc (avec II.2)

$$\mathbb{E}(X_N) \leq \sum_{\substack{p \leq N \\ p \in \mathcal{P}}} \frac{1}{p} = \ln(\ln(N)) + o(1)$$

On peut donc conclure que

$$\boxed{\mathbb{V}(X_N) = O(\ln(\ln(N)))}$$

(d) On utilise le résultat de la question 9 avec la suite (X_N) en posant $a_N = \ln(\ln(N))$ et donc $b_N = \mathbb{E}(X_N) - a_N$. Pour que cela soit licite, il nous faut justifier que (b_N) est bornée. On a

$$b_N = \frac{1}{N} \sum_{\substack{p \leq N \\ p \in \mathcal{P}}} \lfloor \frac{N}{p} \rfloor - \ln(\ln(N))$$

On sait déjà que

$$b_N \leq \frac{1}{N} \sum_{\substack{p \leq N \\ p \in \mathcal{P}}} \frac{N}{p} - \ln(\ln(N)) = O(1)$$

ce qui montre que la suite (b_N) est majorée. On a aussi

$$b_N \geq \frac{1}{N} \sum_{\substack{p \leq N \\ p \in \mathcal{P}}} \left(\frac{N}{p} - 1 \right) - \ln(\ln(N)) = \underbrace{\frac{1}{N} \sum_{\substack{p \leq N \\ p \in \mathcal{P}}} \frac{N}{p} - \ln(\ln(N))}_{=O(1)} - \frac{1}{N} \sum_{\substack{p \leq N \\ p \in \mathcal{P}}} 1$$

Comme la dernière somme est au plus égale à N, on a aussi le caractère minoré de (b_N). Le résultat de I.9(b) est alors exactement

$$\boxed{\lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \mathrm{Card}\{n \in [\![1, N]\!],\ |\omega(n) - \ln(\ln(N))| > (\ln(\ln(N)))^{2/3}\} = 0}$$