

## EXERCICE 2

### Étude d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle suivante :

$$x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' + y = 2x^3. \quad (E)$$

#### Partie I - Solution particulière de l'équation homogène

Dans cette première partie, on souhaite déterminer les solutions développables en série entière de l'équation différentielle homogène associée à (E) :

$$x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' + y = 0. \quad (H)$$

On fixe une suite de nombres réels  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que la série entière  $\sum a_n x^n$  ait un rayon de convergence  $r > 0$ . On définit la fonction  $f : ]-r, r[ \rightarrow \mathbb{R}$  par :

$$\forall x \in ]-r, r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

**Q1.** Justifier que la fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  et que les fonctions  $f'$  et  $f''$  sont développables en série entière. Exprimer avec la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  les développements en série entière respectifs des fonctions  $f'$  et  $f''$  en précisant leur rayon de convergence.

**Q2.** Montrer qu'il existe une suite  $(b_n)_{n \geq 2}$  de nombres réels non nuls telle que pour tout  $x \in ]-r, r[$ , on a :

$$x^2(1-x)f''(x) - x(1+x)f'(x) + f(x) = a_0 + \sum_{n=2}^{+\infty} b_n(a_n - a_{n-1})x^n.$$

**Q3.** Montrer que  $f$  est solution de (H) sur l'intervalle  $]-r, r[$  si et seulement si  $a_0 = 0$  et  $a_{n+1} = a_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**Q4.** En déduire que si  $f$  est solution de (H) sur  $]-r, r[$ , alors  $r \geq 1$  et il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que :

$$\forall x \in ]-1, 1[, \quad f(x) = \frac{\lambda x}{1-x}.$$

**Q5.** Réciproquement, montrer que si  $\lambda \in \mathbb{R}$ , alors la fonction

$$g : ]-1, 1[ \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\lambda x}{1-x}$$

est une solution de (H) sur  $]-1, 1[$  développable en série entière.

## Partie II - Solution de $(E)$ sur $]0, 1[$ ou $]1, +\infty[$

On désigne par  $I$  l'un des intervalles  $]0, 1[$  ou  $]1, +\infty[$ . Soit  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$ . On définit la fonction  $z : I \rightarrow \mathbb{R}$  par la relation :

$$\forall x \in I, \quad z(x) = \left(\frac{1}{x} - 1\right) y(x).$$

- Q6.** Justifier que  $z$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur l'intervalle  $I$ , puis exprimer  $z'$  et  $z''$  avec  $y$ ,  $y'$  et  $y''$ .
- Q7.** Montrer que  $y$  est solution de  $(E)$  sur  $I$  si et seulement si  $z$  est solution sur  $I$  de l'équation différentielle :

$$xz'' + z' = 2x. \quad (E_1)$$

- Q8.** Montrer que si  $z$  est solution de  $(E_1)$  sur  $I$ , alors il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que :

$$\forall x \in I, \quad z'(x) = \frac{\lambda}{x} + x.$$

- Q9.** En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle  $(E)$  sur  $I$ .

## Partie III - Solution de $(E)$ sur $]0, +\infty[$

- Q10.** Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle  $(E)$  sur  $]0, +\infty[$ .