EXERCICE 3
Étude d'une marche aléatoire

On considère trois points distincts du plan nommés A, B et C. Nous allons étudier le déplacement aléatoire d'un pion se déplaçant sur ces trois points.

A l'étape $n = 0$, on suppose que le pion se trouve sur le point A. Ensuite, le mouvement aléatoire du pion respecte les deux règles suivantes :

1. le mouvement du pion de l'étape n à l'étape $n+1$ ne dépend que de la position du pion à l'étape n ; plus précisément, il ne dépend pas des positions occupées aux autres étapes précédentes.
2. pour passer de l'étape n à l'étape $n+1$, on suppose que le pion a une chance sur deux de rester sur place, sinon il se déplace de manière équiprobable vers l'un des deux autres points.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note A_n l'évènement "le pion se trouve en A à l'étape n", B_n l'évènement "le pion se trouve en B à l'étape n" et C_n l'évènement "le pion se trouve en C à l'étape n". On note également :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ p_n = \mathbb{P}(A_n), \quad q_n = \mathbb{P}(B_n), \quad r_n = \mathbb{P}(C_n), \quad V_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix},$$

et on considère la matrice :

$$M = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

Dans l'exercice, on pourra utiliser **sans le démontrer** le résultat suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ M^n = \frac{1}{3 \cdot 4^n}\begin{pmatrix} 4^n+2 & 4^n-1 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n+2 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n-1 & 4^n+2 \end{pmatrix}.$$

On rappelle que si E et F sont deux évènements avec $\mathbb{P}(F) > 0$, on définit la probabilité conditionnelle de E sachant F (notée $\mathbb{P}(E \mid F)$ ou $\mathbb{P}_F(E)$) par :

$$\mathbb{P}(E \mid F) = \mathbb{P}_F(E) = \frac{\mathbb{P}(E \cap F)}{\mathbb{P}(F)}.$$

Partie I - Calcul des probabilités

Q1. Calculer les nombres p_n, q_n et r_n pour $n = 0$ et $n = 1$.

Q2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a la relation $V_{n+1} = MV_n$.

Q3. En déduire que $V_n = M^n V_0$, puis une expression de p_n, q_n et r_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Q4. Déterminer les limites respectives des suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Interpréter le résultat.

Partie II - Nombre moyen de passages en A

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note a_n le nombre moyen de passages du pion en A entre l'étape 1 et l'étape n et on définit la variable aléatoire :

$$X_n = \begin{cases} 1 \text{ si } A_n \text{ est réalisé} \\ 0 \text{ si } \overline{A_n} \text{ est réalisé} \end{cases}.$$

Q5. Interpréter la variable aléatoire $X_1 + \cdots + X_n$ et le nombre $\mathbb{E}[X_1 + \cdots + X_n]$.

Q6. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Q7. En déduire une expression de a_n.

Partie III - Temps d'attente avant le premier passage en B

On définit la variable aléatoire T_B de la façon suivante :

1. si le pion ne passe jamais en B, on pose $T_B = 0$;
2. sinon, T_B est le numéro de l'étape à laquelle le pion passe pour la première fois en B.

Nous allons déterminer la loi de T_B et son espérance.

Q8. Calculer $\mathbb{P}(T_B = 1)$ et $\mathbb{P}(T_B = 2)$.

Q9. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer $\overline{B_n}$ en fonction de A_n et C_n.

Q10. Établir que $\mathbb{P}(B_3 \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_1}) = \dfrac{1}{4}\mathbb{P}(\overline{B_2} \cap \overline{B_1})$, puis en déduire que $\mathbb{P}(B_3 \mid \overline{B_2} \cap \overline{B_1}) = \dfrac{1}{4}$.

Dans la suite, on admet la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}\left(B_{n+1} \,\middle|\, \bigcap_{k=1}^{n} \overline{B_k}\right) = \frac{1}{4}.$$

Q11. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $\mathbb{P}(T_B = k)$. Que vaut $\mathbb{P}(T_B = 0)$?

Q12. Justifier que la variable aléatoire T_B admet une espérance. Quelle est l'espérance de T_B ?