2019 - Centrale-Supélec - PSI - Mathématiques 2
Un corrigé

Premiers résultats.

Q1. Soit $\mathcal{B}$ une base de E et u un endomorphisme de E. Posons $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$.
Puisque $M^k = (\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u))^k = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u^k)$, on a :

$$\begin{aligned} u \text{ est nilpotent d'indice } p &\Leftrightarrow M \text{ est nilpotente d'indice } p \\ &\Leftrightarrow M^p = 0 \text{ et } M^{p-1} \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u^p) = 0 \text{ et } Mat_{\mathcal{B}}(u^{p-1}) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow u^p = 0 \text{ et } u^{p-1} \neq 0. \end{aligned}$$

On utilisera dans la suite que $\boxed{u \text{ est nilpotent d'indice } p \text{ si et seulement si } u^p = 0 \text{ et } u^{p-1} \neq 0.}$
Soit un endomorphisme nilpotent d'indice 1, alors $u = u^1 = 0$.
$\boxed{\text{Un endomorphisme nilpotent d'indice 1 est nul.}}$

Q2. L'endomorphisme u est nilpotent d'indice $p \geq 2$. p est le plus petit entier $k \geq 1$ tel que $u^k = 0$.
Donc $u^p = 0$ et $u^{p-1} \neq 0$ (sinon cela contredirait la minimalité de l'entier p).
Puisque $u^{p-1} \neq 0$, $\boxed{\text{il existe un vecteur } x \in E \text{ tel que } u^{p-1}(x) \neq 0.}$

Q3. L'endomorphisme u est nilpotent d'indice $p \geq 2$. Puisque $u^p = 0$, on a également $\boxed{\forall k \geq p, u^k = 0.}$
Montrons que la famille $(u^k(x))_{0 \leq k \leq p-1}$ est libre. Soit $(\lambda_0, \ldots, \lambda_{p-1}) \in \mathbb{C}^p$ des scalaires tels que :

$$\lambda_0 x + \lambda_1 u(x) + \ldots + \lambda_{p-1} u^{p-1}(x) = 0. \quad (*)$$

- En appliquant l'endomorphisme u^{p-1} à l'équation $(*)$, il vient : $\lambda_0 u^{p-1}(x) = 0$ or $u^{p-1}(x) \neq 0$ donc $\lambda_0 = 0$.
  L'équation $(*)$ devient : $\lambda_1 u(x) + \ldots + \lambda_{p-1} u^{p-1}(x) = 0$.
- En appliquant l'endomorphisme u^{p-2} à l'équation $(*)$, il vient : $\lambda_1 u^{p-1}(x) = 0$ or $u^{p-1}(x) \neq 0$ donc $\lambda_1 = 0$.
  L'équation $(*)$ devient : $\lambda_2 u^2(x) + \ldots + \lambda_{p-1} u^{p-1}(x) = 0$.
- ...
- En itérant le procédé, on obtient $\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_{p-2} = 0$.
  L'équation $(*)$ devient : $\lambda_{p-1} u^{p-1}(x) = 0$. Or $u^{p-1}(x) \neq 0$ donc $\lambda_{p-1} = 0$.
- Finalement, $\forall i \in [|0, p-1|], \lambda_i = 0$, donc la famille $\mathcal{B} = (x, u(x), \ldots u^{p-1}(x))$ est libre.

Ainsi $\boxed{\text{la famille } (u^k(x))_{0 \leq k \leq p-1} \text{ est libre.}}$
L'espace vectoriel E est de dimension 2, donc toute famille libre est de cardinal inférieur ou égal à 2.
La famille libre $(u^k(x))_{0 \leq k \leq p-1}$ est de cardinal p, d'où $p \leq 2$. Or $p \geq 2$ donc $\boxed{p = 2.}$

Q4. L'endomorphisme u est nilpotent d'indice $p = 2$, donc $u^2 = 0$ avec $u \neq 0$.
Puisque $u \neq 0$ n'est pas l'endomorphisme nul, son rang vérifie $\mathrm{rg}(u) \geq 1$.
Puisque $\dim(E) = n = 2$, $\mathrm{rg}(u)$ vaut 1 ou 2.
Supposons par l'absurde que $\mathrm{rg}(u) = 2$, alors u serait bijectif, donc u^2 serait également bijectif. Ceci est absurde car $u^2 = 0$. On a donc $\mathrm{rg}(u) = 1$.
Par le théorème du rang, on a de plus $\mathrm{rg}(u) + \dim(\mathrm{Ker}(u)) = \dim(E) = 2$ donc $\dim(\mathrm{Ker}(u)) = 2 - 1 = 1$.
Puisque $u^2 = 0$, on a $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u)$. En effet, soit $x \in \mathrm{Im}(u)$, alors $\exists y \in E, x = u(y)$ donc $u(x) = u^2(y) = 0$ et $x \in \mathrm{Ker}(u)$.
On obtient $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u)$ et ces sous-espaces vectoriels sont de même dimension 1, d'où l'égalité $\boxed{\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Im}(u).}$

Q5. On a montré que $p = 2$ et que la famille $(u^k(x))_{0 \leq k \leq p-1} = (x, u(x))$ est libre.
La famille $\mathcal{B} = (x, u(x))$ est libre et de cardinal 2 dans un espace E de dimension 2, donc c'est une base de E.
De plus $u(x) = 0x + 1u(x)$ et $u(u(x)) = u^2(x) = 0$ donc la matrice de u dans $\mathcal{B}$ vaut :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = J_2.$$

$\boxed{\text{La famille } \mathcal{B} = (x, u(x)) \text{ est une base de } E \text{ dans laquelle la matrice de } u \text{ vaut } J_2.}$

Q6. Soit $A \in M_2(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente de $M_2(\mathbb{C})$, d'indice de nilpotence p.
Si $p = 1$, alors $A = 0$ donc la trace et le déterminant de A sont nuls.
Si $p \geq 2$, on a montré que $p = 2$. Notons u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^2$ canoniquement associé à A. Alors u est nilpotent d'indice 2. Il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = J_2$.
Notons P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{C}^2$ à la base $\mathcal{B}$, alors $P^{-1}AP = J_2$ et A et J_2 sont semblables.
Puisque A et J_2 sont semblables, elles ont même trace et même déterminant. Or $J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est de trace nulle et de déterminant nul, donc A également.
On a montré que si $A \in M_2(\mathbb{C})$ est nilpotente, alors $\mathrm{Tr}(A) = \det(A) = 0$.
Réciproquement, supposons que $\mathrm{Tr}(A) = \det(A) = 0$. En écrivant $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, le polynôme caractéristique de A vaut

$$\chi_A(X) = X^2 - (a+d)X + (ad - bc) = X^2 - \mathrm{Tr}(A)X + \det(A) = X^2.$$

D'après le théorème de Cayley-Hamilton, le polynôme caractéristique de A annule A donc $\chi_A(A) = A^2 = 0$ et A est nilpotente.
Ainsi $\boxed{\text{les matrices nilpotentes de } M_2(\mathbb{C}) \text{ sont exactement les matrices de trace nulle et de déterminant nul.}}$

Q7. L'endomorphisme u est nilpotent d'indice $p = 2$ et de rang r.
Puisque u est nilpotent d'indice $p = 2$, on a $u^2 = 0$ avec $u \neq 0$.
Montrons que $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u)$. Soit $x \in \mathrm{Im}(u)$, alors $\exists y \in E, x = u(y)$ donc $u(x) = u^2(y) = 0$ et $x \in \mathrm{Ker}(u)$.
Donc $\boxed{\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u).}$ En particulier, on a $r = \mathrm{rg}(u) \leq \dim(\mathrm{Ker}(u))$. Par le théorème du rang,

$$2r = r + r \leq \mathrm{rg}(u) + \dim(\mathrm{Ker}(u)) = \dim(E) = n,$$

donc $\boxed{2r \leq n.}$

Q8. On a $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Ker}(u)$ donc $\mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u)$ sont de même dimension r et $\dim(E) = \mathrm{rg}(u) + \dim \mathrm{Ker}(u) = 2r$.
Soit H un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(u)$ dans E : $E = H \oplus \mathrm{Ker}(u)$. Alors $\dim(H) = n - r = r$.
Soit $(e_1, \ldots, e_r)$ une base de H.
Puisque $u^2 = 0$, on a $\forall i \in [|1, r|], u(e_i) \in \mathrm{Ker}(u)$. Montrons que la famille $(u(e_1), \ldots, u(e_r))$ de $\mathrm{Ker}(u)$ est libre.
Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \in \mathbb{C}^r$ des scalaires tels que $\lambda_1 u(e_1) + \ldots + \lambda_r u(e_r) = 0$. Par linéarité de u :

$$0 = \lambda_1 u(e_1) + \ldots + \lambda_r u(e_r) = u(\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_r e_r).$$

Donc le vecteur $\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_r e_r$ appartient à $H \cap \mathrm{Ker}(u) = \{0\}$, donc est nul. Or la famille $(e_1, \ldots, e_r)$ est libre donc $\forall i \in [|1, r|], \lambda_i = 0$.
Finalement, $(u(e_1), \ldots, u(e_r))$ est une famille libre et de cardinal r de $\mathrm{Ker}(u)$ qui est de dimension r, donc c'est une base de $\mathrm{Ker}(u)$.
La décomposition $E = H \oplus \mathrm{Ker}(u)$ montre qu'en réunissant la base $(e_1, \ldots, e_r)$ de H et la base $(u(e_1), \ldots, u(e_r))$ de $\mathrm{Ker}(u)$, on obtient une base de E.
En réordonnant cette base, $\boxed{(e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \ldots, e_r, u(e_r)) \text{ est une base de } E.}$

Q9. Notons $\mathcal{B} = (e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \ldots, e_r, u(e_r))$ la base de E obtenue dans la question précédente.
Soit $k \in [|1, r|]$, alors u envoie e_k sur $u(e_k)$.
$u^2 = 0$ donc $u(u(e_k)) = 0$. Chaque famille $(e_k, u(e_k))$ fait apparaître un bloc $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = J_2$ sur la diagonale. On en déduit la matrice par blocs de u dans $\mathcal{B}$, qui contient r blocs J_2 :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} J_2 & & \\ & \ddots & \\ & & J_2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \mathrm{Diag}(J_2, \ldots J_2) \text{ avec } r \text{ blocs diagonaux } J_2.}$

Q10. On a $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u)$ avec $\mathrm{Im}(u) \neq \mathrm{Ker}(u)$ donc $\mathrm{Ker}(u)$ est de dimension $\dim(\mathrm{Ker}(u)) = n - r > r$.
Soit H un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(u)$ dans E : $E = H \oplus \mathrm{Ker}(u)$. Alors $\dim(H) = r$.
Soit $(e_1, \ldots, e_r)$ une base de H.
Comme dans la question **Q8.**, la famille $(u(e_1), \ldots, u(e_r))$ est encore une famille libre et de cardinal r de $\mathrm{Ker}(u)$

qui est de dimension $n-r>r$. Donc on peut compléter cette famille en une base de $\mathrm{Ker}(u)$, en rajoutant $(n-r)-r=n-2r$ vecteurs de $\mathrm{Ker}(u)$, que l'on note $(v_1,\dots,v_{n-2r})$.
La décomposition $E=H\oplus\mathrm{Ker}(u)$ montre qu'en réunissant la base $(e_1,\dots,e_r)$ de H et la base $(u(e_1),\dots,u(e_r),v_1,\dots,v_{n-2r})$ de $\mathrm{Ker}(u)$, on obtient une base de E.
En réordonnant cette base, $\boxed{(e_1,u(e_1),e_2,u(e_2),\dots,e_r,u(e_r),v_1,\dots,v_{n-2r}) \text{ est une base de } E.}$

Q11. Notons $\mathcal{B}=(e_1,u(e_1),e_2,u(e_2),\dots,e_r,u(e_r),v_1,\dots,v_{n-2r})$ la base de E obtenue dans la question précédente.
Soit $k\in[|1,r|]$, alors u envoie e_k sur $u(e_k)$.
$u^2=0$ donc $u(u(e_k))=0$. Chaque famille $(e_k,u(e_k))$ fait apparaître un bloc $\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=J_2$ sur la diagonale. Les vecteurs $v_1,\dots,v_{n-2r}$ appartiennent à $\mathrm{Ker}(u)$ donc $\forall k\in[|1,n-2r|],u(v_k)=0$.
On en déduit la matrice par blocs de u dans $\mathcal{B}$, qui contient r blocs J_2 puis $n-2r$ termes 0 sur la diagonale :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)=\begin{pmatrix}J_2&&&\\&\ddots&&\\&&J_2&\\&&&0_{n-2r}\end{pmatrix}.$$

Ainsi $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)=\mathrm{Diag}(J_2,\dots J_2,0_{n-2r}) \text{ avec } r \text{ blocs diagonaux } J_2.}$

Q12. Soit $A\in M_n(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice $p\geq 1$. Alors $A^p=0$ donc le polynôme $P(X)=X^p$ annule A.
D'après le cours, $\mathrm{Sp}(A)\subset\mathrm{Racines}(P)=\{0\}$. De plus, le polynôme caractéristique de A est de degré $n\geq 1$ et scindé sur $\mathbb{C}$ donc possède au moins une racine, donc le spectre de A est non vide et nécessairement $\mathrm{Sp}(A)=\{0\}$.
$\boxed{\text{Si } A \text{ est nilpotente, alors 0 est l'unique valeur propre de } A.}$

Q13. Soit $A\in M_n(\mathbb{C})$ nilpotente et diagonalisable.
Alors A est semblable à une matrice diagonale $D\in M_n(\mathbb{C})$ dont la diagonale contient les valeurs propres de A.
On a montré que $\mathrm{Sp}(A)=\{0\}$, donc $D=0$.
Ainsi $\exists P\in GL_n(\mathbb{C}),P^{-1}AP=D=0$, d'où $A=P0P^{-1}=0$ et A est nulle.
Réciproquement, la matrice nulle est clairement diagonalisable et nilpotente.
$\boxed{\text{La seule matrice de } M_n(\mathbb{C}) \text{ à la fois nilpotente et diagonalisable est la matrice nulle.}}$

Q14. Soit $A\in M_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente. Puisque 0 est la seule valeur propre, la seule racine de son polynôme caractéristique χ_A est 0. De plus χ_A est unitaire et de degré n, donc $\chi_A(X)=X^n$.
Réciproquement, soit $A\in M_n(\mathbb{C})$ de polynôme caractéristique $\chi_A(X)=X^n$.
D'après le théorème de Cayley-Hamilton, le polynôme caractéristique de A annule A donc $\chi_A(A)=A^n=0$ et la matrice A est nilpotente (d'indice de nilpotence $p\leq n$).
$\boxed{\text{Une matrice } A\in M_n(\mathbb{C}) \text{ est nilpotente si et seulement si son polynôme caractéristique vaut } \chi_A(X)=X^n.}$

Q15. On suppose que 0 est l'unique valeur propre de $A\in M_n(\mathbb{C})$.
Les racines du polynôme caractéristique χ_A sont exactement les valeurs propres de A. Donc la seule racine de χ_A est 0. De plus χ_A est unitaire et de degré n, donc $\chi_A(X)=X^n$.
D'après la question **Q14.**, A est nilpotente.
$\boxed{\text{Si 0 est l'unique valeur propre de } A\in M_n(\mathbb{C})\text{, alors } A \text{ est nilpotente.}}$

Q16. Soit $A\in M_n(\mathbb{C})$ une matrice triangulaire de diagonale nulle. Alors le polynôme caractéristique se calcule aisément : $\chi_A(X)=\det(XI_n-A)=X^n$ (la matrice XI_n-A est en effet triangulaire supérieure avec des X sur sa diagonale).
D'après la question **Q14.**, A est nilpotente.
$\boxed{\text{Une matrice triangulaire de } M_n(\mathbb{C}) \text{ de diagonale nulle est nilpotente.}}$
Soit $A\in M_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente. Alors $\mathrm{Sp}(A)=\{0\}$.
Son polynôme caractéristique χ_A est scindé sur $\mathbb{C}$ donc A est trigonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$. Il existe $P\in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $T=P^{-1}AP$ est triangulaire supérieure. Ces deux matrices sont semblables donc ont même spectre, or $\mathrm{Sp}(A)=\{0\}$, donc les coefficients diagonaux de T, qui sont aussi ses valeurs propres, valent 0.
$\boxed{\text{Une matrice nilpotente est semblable à une matrice triangulaire à diagonale nulle.}}$

Q17. Soit A une matrice nilpotente d'indice p. Alors $A^p=0$.
Soit $P\in\mathbb{C}[X]$ un polynôme multiple de X^p. Alors il existe $Q\in\mathbb{C}[X]$ tel que $P(X)=X^pQ(X)$.
Alors $P(A)=A^pQ(A)=0Q(A)=0$ donc P est un polynôme annulateur de A.
$\boxed{\text{Si } A \text{ est nilpotente d'indice } p\text{, alors tout polynôme de } \mathbb{C}[X] \text{ multiple de } X^p \text{ est un polynôme annulateur de } A.}$

Q18. Soit A une matrice nilpotente et P un polynôme annulateur de A.
Puisque A est nilpotente, sa seule valeur propre est 0.
Puisque P annule A, $\{0\} = \mathrm{Sp}(A) \subset \mathrm{Racines}(P)$: les valeurs propres de A sont des racines de P.
En particulier, $\boxed{0 \text{ est racine de } P.}$

Q19. On a $P(A) = 0$ et $P(X) = X^m Q(X)$ avec $Q(0) \neq 0$.
Puisque $Q(0) \neq 0$, 0 n'est pas racine de Q. On note d le degré de Q, $C \neq 0$ son coefficient dominant, a_k ses racines qui sont toutes non nulles, alors

$$Q(X) = C\prod_{k=1}^{d}(X - a_k). \quad Q(A) = C\prod_{k=1}^{d}(A - a_k I_n).$$

A est nilpotente donc 0 est la seule valeur propre de A. Ainsi $\forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, λ n'est pas valeur propre de A donc $\mathrm{Ker}(A - \lambda I_n) = \{0\}$ et la matrice $(A - \lambda I_n)$ est inversible.
Ainsi $\forall k \in [|1, d|], a_k \neq 0$ donc $(A - a_k I_n)$ est inversible. Alors $Q(A)$ est un produit de matrices inversibles, donc $\boxed{Q(A) \text{ est inversible.}}$
On en déduit alors :

$$0 = P(A) = A^m Q(A) \quad \Rightarrow \quad A^m = 0(Q(A))^{-1} = 0$$

donc $A^m = 0$. Par minimalité de l'indice de nilpotence p de A, on a $p \leq m$. Ainsi $\exists l \in \mathbb{N},\ m = p + l$ et

$$P(X) = X^m Q(X) = X^p(X^l Q(X)),$$

donc $\boxed{P \text{ est un multiple de } X^p \text{ dans } \mathbb{C}[X].}$

Q20. On considère $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 2 & 6 & -14 \\ 1 & 3 & -7 \end{pmatrix}$. La trace de A est nulle : $\mathrm{Tr}(A) = 1 + 6 - 7 = 0$. $\boxed{\mathrm{Tr}(A) = 0.}$
Notons C_1, C_2, C_3 les trois colonnes de A, puisque $C_2 = 3C_1$ et $C_3 = -7C_1$ on a $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}(C_1)$ donc $\mathrm{rg}(A) \leq 1$. Or $A \neq 0$ donc $\mathrm{rg}(A) \geq 1$. Ainsi $\boxed{\mathrm{rg}(A) = 1.}$
Par le théorème du rang, $\mathrm{rg}(A) + \dim(\mathrm{Ker}(A)) = 3$ donc $\boxed{\dim(\mathrm{Ker}(A)) = 2.}$
En particulier, 0 est valeur propre de A, de multiplicité au moins 2.
Supposons que 0 soit valeur propre de multiplicité exactement 2 dans χ_A, alors il existe une valeur propre $\lambda \neq 0$, nécessairement de multiplicité 1.
Puisque la trace est la somme des valeurs propres comptées avec multiplicité, on aurait :

$$\mathrm{Tr}(A) = 0 = 2 \times 0 + 1 \times \lambda = \lambda,$$

donc $\lambda = 0$, ce qui est absurde. Ainsi 0 est valeur propre de multiplicté 3 dans le polynôme caractéristique, donc $\boxed{\chi_A(X) = X^3.}$ Par la question **Q14.**, A est nilpotente.
Un simple calcul montre que $A^2 = 0$ avec $A \neq 0$, donc $\boxed{A \text{ est nilpotente d'indice de nilpotence } p = 2.}$

Q21. A est nilpotente d'indice 2 donc il existe $e_1 \in \mathbb{C}^3$ tel que $Ae_1 \neq 0$. On pose ensuite $e_2 = Ae_1$. On peut prendre par exemple

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin \mathrm{Ker}(A), \quad e_2 = Ae_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A).$$

$A^2 = 0$ donc $Ae_2 = A^2 e_1 = 0$ et $e_2 \in \mathrm{Ker}(A)$. Or $\mathrm{Ker}(A)$ est de dimension 2 donc on peut trouver e_3 tel que (e_2, e_3) forme une base de $\mathrm{Ker}(A)$. On prend par exemple

$$e_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A).$$

Posons

$$\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.}$$

Alors P est inversible (en calculant son déterminant par exemple). Puisque $Ae_1 = e_2, Ae_2 = Ae_3 = 0$, la matrice de l'endomorphisme u canoniquement associé à A dans la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ vaut

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Diag}(J_2, J_1).}$$

Q22. Notons $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{C}^3$, alors $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u)$ et $R = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\rho)$. L'égalité $R^2 = A$ conduit à

$$R^2 = (\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\rho))^2 = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\rho^2) = A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u).$$

Donc $\boxed{\rho^2 = u.}$ Alors $u \circ \rho = \rho^2 \circ \rho = \rho^3 = \rho \circ \rho^2 = \rho \circ u$ donc $\boxed{u \text{ et } \rho \text{ commutent.}}$
Montrons que $\mathrm{Im}(u)$ est stable par ρ. Soit $x \in \mathrm{Im}(u)$. $\exists y \in E,\ x = u(y)$. Alors $\rho(x) = \rho(u(y)) = u(\rho(y)) \in \mathrm{Im}(u)$.
Donc $\boxed{\mathrm{Im}(u) \text{ est stable par } \rho.}$
Montrons que $\mathrm{Ker}(u)$ est stable par ρ. Soit $x \in \mathrm{Ker}(u)$. Alors $u(x) = 0$ donc $u(\rho(x)) = \rho(u(x)) = \rho(0) = 0$ donc $\rho(x) \in \mathrm{Ker}(u)$. Donc $\boxed{\mathrm{Ker}(u) \text{ est stable par } \rho.}$
Puisque $A^2 = 0$, on a $u^2 = 0$ d'où $\rho^4 = (\rho^2)^2 = u^2 = 0$. Ainsi $\rho^4 = 0$ et $\boxed{\rho \text{ est nilpotent.}}$

Q23. Posons $R' = P^{-1}RP$. Alors

$$(R')^2 = (P^{-1}RP)^2 = P^{-1}R^2PP^{-1}AP = \mathrm{Diag}(J_2, J_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Avec les notations de la question **Q21.** pour les vecteurs e_1, e_2, e_3, on a $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}(e_2)$ et $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Vect}(e_2, e_3)$. Déterminons $\rho(e_1), \rho(e_2), \rho(e_3)$ en utilisant que la matrice de ρ^2 vaut $(R')^2$, et que $\mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u)$ sont stables par u. On a en particulier

$$\begin{cases} \rho^2(e_1) &= e_2. \\ \rho^2(e_2) &= 0. \\ \rho^2(e_3) &= 0. \end{cases}$$

- $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}(e_2)$ est stable par ρ donc $\exists a \in \mathbb{C}, \rho(e_2) = ae_2$.
  Alors $\rho^2(e_2) = a^2e_2 = 0$ donc $a = 0$ et $\boxed{\rho(e_2) = 0.}$
- $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Vect}(e_2, e_3)$ est stable par ρ donc $u(e_3) \in \mathrm{Vect}(e_2, e_3)$ et $\exists (a, b) \in \mathbb{C}^2, \rho(e_3) = ae_2 + be_3$. Alors

  $$\rho^2(e_3) = a\rho(e_2) + b\rho(e_3) = b\rho(e_3) = abe_2 + b^2e_3 = 0.$$

  Puisque (e_2, e_3) est libre, $ab = b^2 = 0$ donc $b = 0$ et $\boxed{\rho(e_3) = ae_2.}$
- $\exists (b, c, d) \in \mathbb{C}^3, \rho(e_1) = be_1 + ce_2 + de_3$. Alors

  $$\rho^2(e_1) = e_2 = b\rho(e_1) + c\rho(e_2) + d\rho(e_3) = b(be_1 + ce_2 + de_3) + dae_2 = b^2e_1 + (bc + da)e_2 + bde_3.$$

  Donc

  $$b^2e_1 + (bc + da - 1)e_2 + bde_3 = 0.$$

  La famille (e_1, e_2, e_3) est libre donc ces trois coefficients sont nuls.

$$\begin{cases} b^2 &= 0. \\ bc + da - 1 &= 0. \\ bd &= 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b &= 0. \\ da &= 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b &= 0. \\ d &= 1/a,\ a \neq 0. \end{cases}$$

On en déduit finalement qu'il existe $a \neq 0$ et $c \in \mathbb{C}$ tels que :

$$\begin{cases} \rho(e_1) &= ce_2 + (1/a)e_3. \\ \rho(e_2) &= 0. \\ \rho(e_3) &= ae_2. \end{cases} \Rightarrow R' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\rho) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & a \\ 1/a & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, une telle matrice vérifie bien $(R')^2 = \mathrm{Diag}(J_2, J_1)$.
Donc l'ensemble des racines carrées de A vaut :

$$\boxed{\{\text{racines carrées de } A\} = \left\{ P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & a \\ 1/a & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}, a \in \mathbb{C}^*, c \in \mathbb{C} \right\}}$$

où P est la matrice de passage définie à la question **Q21.**.

Q24. On démontre le résultat préliminaire suivant.
Soit $B \in M_n(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice p. Alors $\chi_B(X) = X^n$ donc $B^n = 0$ et $p \leq n$.
Ainsi $\boxed{\text{l'indice de nilpotence } p \text{ d'une matrice nilpotente } B \in M_n(\mathbb{C}) \text{ vérifie } p \leq n.}$
On suppose qu'il existe une solution R vérifiant $R^2 = J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. En calculant $(J_3)^2$ et $(J_3)^3$:

$$R^4 = (R^2)^2 = (J_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R^6 = (R^2)^3 = (J_3)^3 = 0.$$

On en déduit que $\boxed{R \text{ est nilpotente.}}$ Puisque $R^4 \neq 0$ et $R^6 = 0$, l'indice de nilpotence de R vaut $q = 5$ ou $q = 6$, or $n = 3$ donc $q > n$, ce qui est absurde.
$\boxed{\text{L'équation } R^2 = J_3 \text{ n'a pas de solution.}}$

Q25. Soit $V \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente d'indice p, avec $2p - 1 > n$.
On suppose qu'il existe une solution R vérifiant $R^2 = V$.
V est nilpotente d'indice p donc $V^p = 0$ et $V^{p-1} \neq 0$. Alors

$$R^{2p} = (R^2)^p = V^p = 0$$

donc R est nilpotente. Notons q l'indice de nilpotence de R. On a

$$R^{2p-2} = (R^2)^{p-1} = V^{p-1} \neq 0.$$

Donc l'indice de nilpotence de R est strictement supérieur à $2p - 2$:

$$q \geq 2p - 1 > n$$

donc $q > n$, ce qui est absurde. $\boxed{\text{Si } 2p - 1 > n, \text{ alors l'équation } R^2 = V \text{ n'a pas de solution.}}$

Q26. Soit $n \geq 3$. On remarque que

$$(J_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B,$$

avec $B^2 = 0$ donc B est nilpotente d'indice 2.
Posons $\boxed{V = \mathrm{Diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, 0_{n-3} \right) \in M_n(\mathbb{C}).}$ On a $V^2 = 0$ donc V est nilpotente d'indice $p = 2$. De plus

$$(\mathrm{Diag}\,(J_3, 0_{n-3}))^2 = \mathrm{Diag}\left((J_3)^2, (0_{n-3})^2\right) = V,$$

donc $\boxed{V \text{ admet au moins une racine carrée.}}$

Deuxième partie.

Q27. Soit $x \in \mathrm{Im}(u)$, alors $u(x) \in \mathrm{Im}(u)$ donc $\boxed{\mathrm{Im}(u) \text{ est stable par } u.}$
Notons $v = u_{|\mathrm{Im}(u)}$ l'endomorphisme induit par u sur $\mathrm{Im}(u)$. u est nilpotent d'indice p donc $u^p = 0$.
Alors $\forall x \in \mathrm{Im}(u), v^p(x) = u^p(x) = 0$ donc v est nilpotent. Notons q l'indice de nilpotence de v.
Soit $x \in \mathrm{Im}(u)$. Alors $\exists y \in E,\ x = u(y)$, donc $v^{p-1}(x) = u^{p-1}(x) = u^{p-1}(u(x)) = u^p(x) = 0$ donc $q \leq p-1$.
u est nilpotent d'indice p donc $u^{p-1} \neq 0$. Donc $\exists x \in E, u^{p-1}(x) \neq 0$. Alors $u(x) \in \mathrm{Im}(u)$ et :

$$v^{p-2}(u(x)) = u^{p-2}(u(x)) = u^{p-1}(x) \neq 0,$$

donc $v^{p-2} \neq 0$. Finalement $q \geq p-1$ et $q = p-1$.
$\boxed{\text{L'endomorphisme induit } v = u_{|\mathrm{Im}(u)} \text{ est nilpotent d'indice } q = p-1.}$

Q28. Soit $x \in E$ non nul et $C_u(x) = \mathrm{Vect}(u^k(x), k \in \mathbb{N})$.
Montrons que $C_u(x)$ est stable par u. Soit $y \in C_u(x)$.
Le vecteur y est combinaison linéaire d'un nombre fini de $u^k(x)$, donc $\exists d \in \mathbb{N}$ tel que $y \in \mathrm{Vect}(u^k(x), 0 \leq k \leq d)$.
Ainsi $\exists (a_0, \ldots, a_d) \in \mathbb{C}^{d+1}$ tels que

$$\begin{aligned} y &= \sum_{k=0}^{d} a_k u^k(x). \\ u(y) &= \sum_{k=0}^{d} a_k u(u^k(x)) = \sum_{k=0}^{d} a_k u^{k+1}(x) \in \mathrm{Vect}(u^k(x), k \in \mathbb{N}) = C_u(x). \end{aligned}$$

On a montré que $\forall y \in C_u(x)$, $u(y) \in C_u(x)$, donc $\boxed{C_u(x) \text{ est stable par } u.}$
Puisque $u^p = 0$, on a $u^p(x) = 0$ avec $p \geq 1$. Posons $\mathcal{P}_0 = \{k \in \mathbb{N}^*, u^k(x) = 0\}$. On a $p \in \mathcal{P}_0$. $\mathcal{P}_0$ est une partie non vide et minorée de $\mathbb{N}$, donc admet un plus petit élément noté $s(x)$.
Ainsi $\boxed{\text{il existe un plus petit entier } s(x) \geq 1 \text{ tel que } u^{s(x)}(x) = 0.}$

Q29. On a $\forall k \geq s(x), u^k(x) = 0$ donc

$$C_u(x) = \mathrm{Vect}(u^k(x), k \in \mathbb{N}) = \mathrm{Vect}(u^k(x), 0 \leq k \leq s(x)-1) = \mathrm{Vect}(x, u(x), \ldots u^{s(x)-1}(x)),$$

ce qui prouve que la famille $(x, u(x), \ldots u^{s(x)-1}(x))$ est génératrice de $C_u(x)$.
En appliquant la même technique que dans la question **Q3.**, montrons que cette famille est libre. Pour simplifier les notations, on pose $q = s(x)$. Soit $(\lambda_0, \ldots, \lambda_{q-1}) \in \mathbb{C}^q$ des scalaires tels que :

$$\lambda_0 x + \lambda_1 u(x) + \ldots + \lambda_{q-1} u^{q-1}(x) = 0. \quad (*)$$

- En appliquant l'endomorphisme u^{q-1} à l'équation $(*)$, il vient : $\lambda_0 u^{q-1}(x) = 0$ or $u^{q-1}(x) \neq 0$ donc $\lambda_0 = 0$.
- En appliquant l'endomorphisme u^{q-2} à l'équation $(*)$, il vient : $\lambda_1 u^{q-1}(x) = 0$ or $u^{q-1}(x) \neq 0$ donc $\lambda_1 = 0$.
- $\ldots$
- On obtient $\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_{q-2} = 0$. Alors $\lambda_{q-1} u^{q-1}(x) = 0$ or $u^{q-1}(x) \neq 0$ donc $\lambda_{q-1} = 0$.
- Finalement, $\forall i \in [|0, q-1|], \lambda_i = 0$, donc la famille $\mathcal{B} = (x, u(x), \ldots u^{s(x)-1}(x))$ est libre.

Ainsi $\boxed{\text{la famille } \mathcal{B} = (x, u(x), \ldots u^{s(x)-1}(x)) \text{ est libre et génératrice, donc une base de } C_u(x).}$
Dans cette base, par construction, la matrice de l'endomorphisme $u_{|C_u(x)}$ induit par u sur $C_u(x)$ vaut :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_{|C_u(x)}) = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad \boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_{|C_u(x)}) = J_{s(x)}.}$$

Q30. Montrons par récurrence sur $p \geq 1$ l'hypothèse (H_p) suivante :

$$\boxed{(H_p) : \text{si } u \text{ est nilpotent d'indice } p, \text{ alors il existe des vecteurs } (x_i)_{1 \leq i \leq t} \text{ tels que } E = \bigoplus_{i=1}^{t} C_u(x_i).}$$

Initialisation : $p = 1$. Soit u nilpotent d'indice 1, alors $u = 0$. Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une base quelconque de E. Alors $\forall i, \in [|1, n|], s(x_i) = 1$ donc $C_u(x_i) = \text{Vect}(x_i)$ et $E = \bigoplus_{i=1}^{n} \text{Vect}(x_i) = \bigoplus_{i=1}^{n} C_u(x_i)$.

Hérédité $(H_{p-1}) \Rightarrow (H_p)$ **:** Supposons le résultat vrai au rang $p-1$ et montrons-le au rang p.
Soit u nilpotent d'indice p. Soit $v = u_{|\text{Im}(u)}$ l'endomorphisme induit par u sur $\text{Im}(u)$.
Alors v est nilpotent d'indice $p-1$ (question **Q27.**).
Par hypothèse de récurrence appliquée à v, il existe des vecteurs $y_1, \dots, y_t$ de $\text{Im}(u)$ tels que

$$\text{Im}(u) = \bigoplus_{i=1}^{t} C_u(y_i).$$

Pour tout $i \in [|1, t|]$, on a $y_i \in \text{Im}(u)$ donc $\exists x_i \in E, y_i = u(x_i)$. Remarquons que $s(x_i) = s(y_i) + 1$. On a :

$$\begin{array}{rcl} C_u(x_i) & = & \text{Vect}(x_i, u(x_i), \dots, u^{s(x_i)-1}(x_i)). \\ C_u(y_i) & = & \text{Vect}(y_i, \dots, u^{s(y_i)-1}(y_i)) \quad = \quad \text{Vect}(u(x_i), \dots, u^{s(y_i)}(x_i)) = \text{Vect}(u(x_i), \dots, u^{s(x_i)-1}(x_i)). \\ \dim(C_u(x_i)) & = & \dim(C_u(y_i)) + 1. \end{array}$$

Posons $z = \dim(\text{Ker}(u))$. Les vecteurs $(u^{s(x_1)-1}(x_1), \dots, u^{s(x_t)-1}(x_t))$ forment une famille libre de cardinal t de $\text{Ker}(u)$, que l'on peut compléter en une base de $\text{Ker}(u)$ à l'aide de $z-t$ vecteurs :
$(u^{s(x_i)-1}(x_1), \dots, u^{s(x_i)-1}(x_t), v_1, \dots, v_{z-t})$. On a $v_j \in \text{Ker}(u)$ donc $s(v_j) = 1$ et $C_u(v_j) = \text{Vect}(v_j)$.
On introduit le sous-espace vectoriel F de E suivant :

$$F = \left(\bigoplus_{i=1}^{t} C_u(x_i) \right) \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^{z-t} C_u(v_j) \right).$$

Calculons la dimension de F :

$$\begin{array}{rcl} \dim(F) & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{t} \dim(C_u(x_i)) + \sum_{j=1}^{z-t} \dim(C_u(v_j)) \\ & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{t} (\dim(C_u(y_i)) + 1) + \sum_{j=1}^{z-t} 1 \\ & = & \dim\left(\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{t} C_u(y_i) \right) + t + (z-t) \\ & = & \dim(\text{Im}(u)) + z \\ & = & \text{rg}(u) + \dim(\text{Ker}(u)) = \dim(E), \end{array}$$

en utilisant le théorème du rang. Donc $F = E$, autrement dit Donc $\boxed{E = \left(\bigoplus_{i=1}^{t} C_u(x_i) \right) \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^{z-t} C_u(v_j) \right)}$, ce qui termine la récurrence.

Q31. D'après la question **Q29.**, la matrice de u dans une base $\mathcal{B}$ adaptée à la décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^{t} C_u(x_i)$ vaut :

$$\boxed{\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \text{Diag}(J_{s(x_1)}, J_{s(x_2)}, \dots J_{s(x_t)}).}$$

Q32. On utilise la question **Q29.**. Il existe une décomposition de l'espace $E = \bigoplus_{i=1}^{t} C_u(x_i)$. Soit $\mathcal{B}$ une base de E adaptée à cette décomposition. Alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \text{Diag}(J_{s(x_1)}, J_{s(x_2)}, \dots J_{s(x_t)}).$$

Quitte à permuter les éléments de la base $\mathcal{B}$ pour réordonner les éléments blocs diagonaux, on peut supposer que

$$s(x_1) \geq s(x_2) \geq \dots \geq s(x_k).$$

De plus $s(x_1) + s(x_2) + \dots + s(x_k) = \dim(E) = n$.
Avec les notations précédentes, en posant $\forall i \in [|1, k|], \alpha_i = s(x_i)$ et $\sigma = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$,
$\boxed{\text{il existe une base } \mathcal{B} \text{ de } E \text{ vérifiant } \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = N_\sigma = \text{Diag}(J_{\alpha_1}, \dots, J_{\alpha_k}).}$

Q33. Soit $\alpha \in \mathbb{N}^*$. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

$$J_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_\alpha(\mathbb{C}). \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \forall i \in [|1, n-1|], \quad J_\alpha(e_i) & = & e_{i+1}. \\ J_\alpha(e_n) & = & 0. \end{array} \right.$$

En étudiant l'action de J_α sur la base canonique de $\mathbb{C}^n$, on montre aisément que pour $k \leq n-1$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \forall i \in [|1, n-k|], \quad J_\alpha^k(e_i) & = & e_{i+k}. \\ \forall i \in [|n-k+1, n|], \quad J_\alpha^k(e_i) & = & 0. \end{array} \right.$$

Donc J_α^k est une matrice contenant $n-k$ termes 1 sur la k-ième sous-diagonale et des 0 partout ailleurs.
Ainsi $\text{rg}(J_\alpha) = \alpha - 1$, $\text{rg}(J_\alpha^k) = \alpha - k$ pour $k \leq n-1$ et enfin $\text{rg}(J_\alpha^n) = 0$.

$$\boxed{\forall j \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{rcll} \text{rg}(J_\alpha^j) & = & \alpha - j & \text{si } 0 \leq j \leq \alpha - 1. \\ \text{rg}(J_\alpha^j) & = & 0 & \text{si } 0 \leq j \geq \alpha. \end{array} \right.}$$

En particulier on a $\text{rg}(J_\alpha^\alpha) = 0$ donc $J_\alpha^\alpha = 0$ et $\text{rg}(J_\alpha^{\alpha-1}) = 1$ donc $J_\alpha^{\alpha-1} \neq 0$.
D'où $\boxed{J_\alpha \text{ est nilpotente d'indice } \alpha.}$

Q34. u est nilpotent d'indice p donc la matrice $\text{Mat}_\mathcal{B}(u) = N_\sigma = \text{Diag}(J_{\alpha_1}, \dots, J_{\alpha_k})$ est aussi nilpotente d'indice p.
Puisque J_α est nilpotente d'indice p avec $\alpha_1 \geq \ldots \geq \alpha_p$, on a $\forall i \in [|1, k|], J_{\alpha_i}^{\alpha_1} = 0$ donc

$$\begin{array}{rcll} N_\sigma^{\alpha_1} = \text{Diag}(J_{\alpha_1}^{\alpha_1}, \dots, J_{\alpha_k}^{\alpha_1}) & = & 0. & \\ N_\sigma^{\alpha_1 - 1} = \text{Diag}(J_{\alpha_1}^{\alpha_1-1}, \dots, J_{\alpha_k}^{\alpha_1-1}) & \neq & 0 & \text{car } J_{\alpha_1}^{\alpha_1-1} \neq 0. \end{array}$$

Ainsi N_σ est nilpotente d'indice α_1. Donc $\boxed{\alpha_1 = p.}$

Q35. On note $\Lambda_j = \{i \in [|1, k|], \alpha_i \geq j\}$. On a

$$N_\sigma^j = \text{Diag}(J_{\alpha_1}, \dots, J_{\alpha_k})^j = \text{Diag}(J_{\alpha_1}^j, \dots, J_{\alpha_k}^j), \quad \text{donc} \quad \text{rg}(N_\sigma^j) = \sum_{i=1}^k \text{rg}(J_{\alpha_i}^j).$$

Si $i \notin \Lambda_j$, alors $\alpha_i < j$ donc $J_{\alpha_i}^j = 0$ et $\text{rg}(J_{\alpha_i}^j) = 0$.
Si $i \in \Lambda_j$, alors $\alpha_i \geq j$ donc $\text{rg}(J_{\alpha_i}^j) = \alpha_i - j$. Ainsi

$$\text{rg}(N_\sigma^j) = \sum_{i \notin \Lambda_j} 0 + \sum_{i \in \Lambda_j} \text{rg}(J_{\alpha_i}^j) = \sum_{i \in \Lambda_j} (\alpha_i - j). \quad \boxed{\text{rg}(N_\sigma^j) = \sum_{i \in \Lambda_j} (\alpha_i - j).}$$

Q36. D'après la question **Q35.** :

$$d_j = \text{rg}(u^{j-1}) - \text{rg}(u^j) = \text{rg}(N_\sigma^{j-1}) - \text{rg}(N_\sigma^j) = \sum_{i \in \Lambda_{j-1}} (\alpha_i - (j-1)) - \sum_{i \in \Lambda_j} (\alpha_i - j).$$

Remarquons que $\Lambda_j \subset \Lambda_{j-1}$. On décompose $\Lambda_{j-1} = \Lambda_j \sqcup (\Lambda_{j-1} \setminus \Lambda_j)$ avec

$$\Lambda_{j-1} \setminus \Lambda_j = \{i \in [|1, k|] | \alpha_i \geq j-1 \text{ et } \alpha_i < j\} = \{i \in [|1, k|] | \alpha_i = j-1\}.$$

Il vient :

$$\begin{array}{rcl} d_j & = & \displaystyle\sum_{i \in \Lambda_j} (\alpha_i - (j-1)) + \sum_{i \in \Lambda_{j-1} \setminus \Lambda_j} (\alpha_i - (j-1)) - \sum_{i \in \Lambda_j} (\alpha_i - j) \\ & = & \displaystyle\sum_{i \in \Lambda_j} 1 + \sum_{i | \alpha_i = j-1} (\alpha_i - (j-1)) \\ & = & \displaystyle\sum_{i \in \Lambda_j} 1 + \sum_{i | \alpha_i = j-1} 0 \\ & = & \displaystyle\sum_{i \in \Lambda_j} 1 = \text{Card}(\Lambda_j). \end{array}$$

On a montré que $\boxed{d_j = \text{Card}(\Lambda_j)}$: $\boxed{d_j \text{ est égal au nombre de blocs } J_{\alpha_i} \text{ dont la taille vérifie } \alpha_i \geq j.}$

Q37. Pour tout bloc J_{α_i}, sa taille est supérieure ou égale à 1.
Donc le nombre total k de blocs est égal au nombre de blocs J_{α_i} dont la taille $\alpha_i \geq 1$, d'où $\boxed{k = d_1.}$
Ainsi $k = d_1 = \mathrm{rg}(u^{1-1}) - \mathrm{rg}(u^1) = \mathrm{rg}(\mathrm{Id}_E) - \mathrm{rg}(u) = n - \mathrm{rg}(u)$. Finalement $\boxed{k = d_1 = n - \mathrm{rg}(u) = \dim(\mathrm{Ker}(u)).}$

Q38. Soit $j \in [|1, n|]$. Le nombre de blocs J_{α_i} de taille exactement égale à j est égal au nombre de blocs de taille $\alpha_i \geq j$ moins le nombre de blocs de taille $\alpha_i \geq j-1$, c'est-à-dire :

$$d_j - d_{j-1} = \Big(\mathrm{rg}(u^{j-1}) - \mathrm{rg}(u^j)\Big) - \Big(\mathrm{rg}(u^{j-2}) - \mathrm{rg}(u^{j-1})\Big) = -\,\mathrm{rg}(u^j) + 2\,\mathrm{rg}(u^{j-1}) - \mathrm{rg}(u^{j-2}).$$

Le nombre de blocs J_{α_i} de taille exactement égale à j vaut $\boxed{d_j - d_{j-1} = -\,\mathrm{rg}(u^j) + 2\,\mathrm{rg}(u^{j-1}) - \mathrm{rg}(u^{j-2}).}$

Q39. On suppose qu'il existe deux partitions σ et σ' de l'entier n telles que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = N_\sigma$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = N_{\sigma'}$.
D'après la question **Q38.**, le nombre de blocs de taille exactement égale à j vaut $-\,\mathrm{rg}(u^j) + 2\,\mathrm{rg}(u^{j-1}) - \mathrm{rg}(u^{j-2})$ donc ne dépend que de l'endomorphisme u.
Pour tout $j \in [|1, n|]$, les matrices N_σ et $N_{\sigma'}$ ont même nombre de blocs de taille j, ce qui détermine entièrement les deux matrices. Ainsi $N_\sigma = N_{\sigma'}$ et $\boxed{\sigma = \sigma'.}$

Q40. Dans la question **Q39.**, on a montré que si N_σ et $N_{\sigma'}$ représentent le même endomorphisme u dans deux bases différentes, alors $\sigma = \sigma'$.
On en déduit immédiatement que si $\sigma \neq \sigma'$, alors N_σ et $N_{\sigma'}$ ne sont pas semblables.
Considérons l'ensemble :

$$\mathcal{E} = \{N_\sigma, \sigma \in \Gamma_n\} \subset M_n(\mathbb{C}),$$

alors $\mathcal{E}$ est constitué de matrices nilpotentes, telles qu'il n'existe pas dans $\mathcal{E}$ deux matrices semblables. De plus $\mathrm{Card}(\mathcal{E}_n) = \mathrm{Card}(\Gamma_n)$.
Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente. D'après la question **Q32.**, $\exists \sigma \in \Gamma_n$ telle que A est semblable à N_σ.
Soit $\mathcal{F}$ un ensemble de matrices nilpotentes de $M_n(\mathbb{C})$ telles qu'il n'y en ait pas deux semblables, alors les matrices de F sont semblables à un sous-ensemble de $\mathcal{E}$, donc $\mathrm{Card}(\mathcal{F}) \leq \mathrm{Card}(\mathcal{E})$.
Le cardinal maximal d'un ensemble de matrices nilpotentes de $M_n(\mathbb{C})$, ne contenant pas deux matrices semblables, vaut $\boxed{\mathbf{Card}(\Gamma_n).}$
(Autrement dit, le nombre de classes de similitude de matrices nilpotentes dans $M_n(\mathbb{C})$ est exactement égal au nombre $\mathrm{Card}(\Gamma_n)$ de partitions de l'entier n.)

Q41. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et u l'endomorphisme canoniquement associé à A.
Soit x_1 le deuxième vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^5$:

$$x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u(x_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u^2(x_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u^3(x_1) = 0.$$

Donc $s(x_1) = 3$ et $(x_1, u(x_1), u^2(x_1))$ forme une base de $C_u(x_1)$.
Soit x_2 le troisième vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^5$:

$$x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u(x_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad u^2(x_2) = 0.$$

Donc $s(x_2) = 2$ et $(x_2, u(x_2))$ forme une base de $C_u(x_2)$.
La famille $\mathcal{B} = (x_1, u(x_1), u^2(x_1), x_2, u(x_2))$ est libre et de cardinal 5, donc forme une base de $\mathbb{C}^5$. La matrice de u dans $\mathcal{B}$ vaut

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = N_\sigma = \mathrm{Diag}(J_{s(x_1)}, J_{s(x_2)}) = \mathrm{Diag}(J_3, J_2), \quad \text{avec} \quad \alpha_1 = 3 \geq \alpha_2 = 2, \quad 3 + 2 = 5.$$

Donc $\boxed{\sigma = (3,2) \text{ est la partition de l'entier 5 associée à } u, \text{ avec } N_\sigma = \mathrm{Diag}(J_3, J_2).}$

Remarque : ce résultat est cohérent avec la question **Q37.** : le nombre de blocs vaut $k = 2$, or $\mathrm{rg}(u) = 3$ donc $n - \mathrm{rg}(u) = 5 - 3 = 2 = k$.

Q42. Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$ nilpotente et u l'endomorphisme canoniquement associé à M.

Par la question **Q30.**, il existe des vecteurs $(x_i)_{1\leq i\leq t}$ tels que $E = \bigoplus_{i=1}^{t} C_u(x_i)$.

Soit $\mathcal{B}_1$ une base adaptée à cette décomposition, alors par la question **Q31.** :

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(u) = \mathrm{Diag}(J_{s(x_1)}, \dots J_{s(x_t)}).}$$

- **Montrons que M et $2M$ sont semblables.** $2u$ est l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice $2M$. Soit $i \in [|1,t|]$, alors

$$(2u)^k(x_i) = 2^k u^k(x_i) = 0 \Leftrightarrow u^k(x_i) = 0$$

donc le plus petit entier $k \geq 1$ tel que $u^k(x_i) = 0$ est le même pour u et $2u$, on le note toujours $s(x_i)$. De plus,

$$C_{2u}(x_i) = \mathrm{Vect}(x_i, 2u(x_i), \dots, 2^{s(x_i)-1}u^{s(x_i)-1}(x_i)) = \mathrm{Vect}(x_i, u(x_i), \dots, u^{s(x_i)-1}(x_i)) = C_u(x_i).$$

Donc on a la même décomposition de l'espace pour u et pour $2u$:

$$E = \bigoplus_{i=1}^{t} C_u(x_i) = E = \bigoplus_{i=1}^{t} C_{2u}(x_i).$$

Il vient alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(u) = \mathrm{Diag}(J_{s(x_1)}, J_{s(x_2)}, \dots J_{s(x_t)}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(2u).$$

Or M est semblable à $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(u)$, $2M$ est semblable à $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(2u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(u)$, donc par transitivité de la similitude, $\boxed{M \text{ et } 2M \text{ sont semblables.}}$

- **Montrons que M et M^T sont semblables.**
M est semblable à $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(u)$, donc M est semblable à $\mathrm{Diag}(J_{s(x_1)}, \dots J_{s(x_t)})$, donc M^T est semblable à $\mathrm{Diag}(J_{s(x_1)}, \dots J_{s(x_t)})^T$.
Pour $x \in E$, $\mathcal{B} = (x, u(x), \dots u^{s(x)-1}(x))$ est une base de $C_u(x)$, avec :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_{|C_u(x)}) = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad \boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_{|C_u(x)}) = J_{s(x)}.}$$

En inversant l'ordre de la base, c'est-à-dire en posant $\mathcal{B}_{\mathrm{inv}} = (u^{s(x)-1}(x), \dots, u(x), x)$, $\mathcal{B}_{\mathrm{inv}}$ est encore une base de $C_u(x)$, avec :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_{\mathrm{inv}}}(u_{|C_u(x)}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}. \quad \boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_{\mathrm{inv}}}(u_{|C_u(x)}) = J_{s(x)}^T.}$$

Soit $\mathcal{B}_2$ la base obtenue en rangeant les vecteurs de $\mathcal{B}_1$, en sens inverse dans chaque base de $C_u(x_i)$. Plus précisément, on pose donc :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{B}_1 & = & (x_1, \dots, u^{s(x_1)-1}(x_1), \quad x_2, \dots, u^{s(x_2)-1}(x_2), \quad \dots, \quad x_t, \dots, u^{s(x_t)-1}(x_t)). \\ \mathcal{B}_2 & = & (u^{s(x_1)-1}(x_1), \dots, x_1, \quad u^{s(x_2)-1}(x_2), \dots, x_2, \quad \dots, \quad u^{s(x_t)-1}(x_t), \dots, x_t). \end{array}$$

D'après ce qui précède :

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2}(u) = \mathrm{Diag}(J_{s(x_1)}^T, \dots J_{s(x_t)}^T) = \mathrm{Diag}(J_{s(x_1)}, \dots J_{s(x_t)})^T.}$$

Par transitivité, M est semblable à $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2}(u)$, donc M est semblable à $\mathrm{Diag}(J_{s(x_1)}, \dots J_{s(x_t)})^T$, donc $\boxed{M \text{ est semblable à } M^T.}$

Q43. Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$. On suppose que M et $2M$ sont semblables.
Alors M et $2M$ ont même polynôme caractéristique. Puisque l'ensemble des valeurs propres d'une matrice est égal aux racines de son polynôme caractéristique, on en déduit que M et $2M$ ont mêmes valeurs propres : $\mathrm{Sp}(M) = \mathrm{Sp}(2M)$.
On a

$$\mathrm{Ker}(M - \lambda I_n) = \mathrm{Ker}(2M - 2\lambda I_n),$$

donc λ est valeur propre de M si et seulement si 2λ est valeur propre de $2M$. Il vient :

$$\mathrm{Sp}(M) = \mathrm{Sp}(2M) = \{2\lambda, \lambda \in \mathrm{Sp}(M)\}.$$

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de M. Supposons par l'absurde que $\lambda \neq 0$. Par une récurrence immédiate, on montre que $\forall k \geq 0, 2^k\lambda \in \mathrm{Sp}(2M) = \mathrm{Sp}(M)$. Alors $\mathrm{Sp}(M)$ est un ensemble fini de cardinal inférieur ou égal à n et contient l'ensemble infini suivant :

$$\{2^k\lambda, k \in \mathbb{N}\} \subset \mathrm{Sp}(M),$$

ce qui est absurde. Donc $\lambda = 0$ et 0 est l'unique valeur propre de M. D'après la question **Q15.**, M est nilpotente.
On a montré que $\boxed{\text{si } M \text{ et } 2M \text{ sont semblables, alors } M \text{ est nilpotente.}}$

Q44. $Y_{n,1}$ est le nombre de partitions dont le premier terme vérifie $\alpha_1 \leq 1$.
Puisque α_1 est le plus grand terme, tous les autres termes valent 1 et on obtient une unique partition $(1, 1, \ldots, 1)$ de n (avec $k = n$). Par suite, $\boxed{\forall n \geq 1, \quad y_{n,1} = 1.}$
Remarquons pour la suite que $y_{0,0} = 1$ par convention mais pour $n \geq 1, y_{n,0} = 0$.

Q45. Pour $j = n$, le membre de droite de la formule vaut :

$$y_{n,n-1} + y_{n-n,\min(j,n-j)} = y_{n,n-1} + y_{0,0} = y_{n,n-1} + 1.$$

Or

$$Y_{n,n} = \{\sigma \in \Gamma_n,\ \alpha_1 \leq n\} = \{\sigma \in \Gamma_n,\ \alpha_1 \leq n-1\} \sqcup \{\sigma \in \Gamma_n,\ \alpha_1 = n\} = Y_{n,n-1} \sqcup \{(n)\},$$

car il existe une seule partition, la partition (n), telle que $\alpha_1 = n$.
Ainsi $\mathrm{Card}(Y_{n,n}) = \mathrm{Card}(Y_{n,n-1}) + 1$ donc $\boxed{\forall n \geq 2, \quad y_{n,n} = y_{n,n-1} + 1.}$ L'égalité est vraie pour $j = n$.

Q46. Soit $j < n$.

$$Y_{n,j} = \{\sigma \in \Gamma_n,\ \alpha_1 \leq j\} = \{\sigma \in \Gamma_n,\ \alpha_1 \leq j-1\} \sqcup \{\sigma \in \Gamma_n,\ \alpha_1 = j\} = Y_{n,j-1} \sqcup \{\sigma \in \Gamma_n,\ \alpha_1 = j\}.$$

En passant au cardinal,

$$y_{n,j} = y_{n,j-1} + \mathrm{Card}(\{\sigma \in \Gamma_n,\ \alpha_1 = j\}).$$

Soit $\sigma = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k)$ dans l'ensemble $\{\sigma \in \Gamma_n,\ \alpha_1 = j\}$. Alors $\alpha_1 = j$ et $j \geq \alpha_2 \geq \ldots \geq \alpha_k$ avec $\alpha_2 + \ldots + \alpha_k = n - \alpha_1 = n - j$, donc $(\alpha_2, \ldots, \alpha_k) \in Y_{n-j,j}$. Ainsi

$$\mathrm{Card}(\{\sigma \in \Gamma_n,\ \alpha_1 = j\}) = \mathrm{Card}(Y_{n-j,j}) = y_{n-j,j}.$$

On en déduit que $\boxed{\forall j < n, \quad y_{n,j} = y_{n,j-1} + y_{n-j,j}.}$
Si $j \leq n - j$, alors $\min(n-j, j) = j$ donc $y_{n-j,j} = y_{n-j,\min(n-j,j)}$.
Si $j > n - j$, alors $\min(n-j, j) = n - j$ et $y_{n-j,j} = y_{n-j,n-j}$ donc $y_{n-j,j} = y_{n-j,\min(n-j,j)}$.
Dans les deux cas, $\forall j < n, \quad y_{n,j} = y_{n,j-1} + y_{n-j,\min(n-j,j)}$.
Avec la question **Q45.**, on a $\boxed{\forall j \in [|2, n|], \quad y_{n,j} = y_{n,j-1} + y_{n-j,\min(n-j,j)}.}$

Q47. Calculons les $y_{n,j}$ pour $1 \leq j \leq n \leq 5$.
Puisque $y_{n,1} = 1$, on remplit la colonne $j = 1$ de termes 1.
Ensuite, on utilise la relation de récurrence $y_{n,j} = y_{n,j-1} + y_{n-j,\min(j,n-j)}$.
Par exemple, $y_{2,2} = y_{2,1} + 1 = 1 + 1 = 2$.

	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$
$n=1$	1				
$n=2$	1	2			
$n=3$	1	2	3		
$n=4$	1	3	4	5	
$n=5$	1	3	5	6	7

Q48. On propose la fonction récursive Python `calculY(n,j)` qui calcule les $y_{n,j}$, et la fonction Python `calculY2(n)` qui calcule les $y_{n,n}$ en appelant la fonction `calculY(n,j)` :

```python
def calculY(n,j) :
    if n==0 :
        if j==0 :
            return 1
        else :
            return 0
    elif n >= 1 :
        if j==0 :
            return 0
        elif j==1 :
            return 1
        elif j>= 2 :
            return calculY(n,j-1) + calculY(n-j, min(j,n-j))

def calculY2(n):
    return calculY(n,n)

for n in range (1,6) :
    print('Ligne ',n)
    for j in range(1,n+1) :
        print('n=',n,'j=',j,'    y=',calculY(n,j))
```

Q49. Ce résultat fait référence à $y_{n,n}$.
$Y_{n,n}$ est l'ensemble des partitions de n dont le premier terme vérifie $\alpha_1 \leq n$, ce qui est le cas pour toutes les partitions de n.
Donc $\boxed{y_{n,n} = \mathrm{Card}(\Gamma_n)}$ est le nombre de partitions de l'entier n, c'est aussi le résultat de la question **Q40.**, le nombre de classes de similitude de matrices nilpotentes dans $M_n(\mathbb{C})$.
Vérifions par exemple qu'il existe $y_{5,5} = 7$ partitions de l'entier 5 :

$$\begin{array}{rcll} 5 & = & 1+1+1+1+1 & \text{(partition 1)} \\ & = & 2+1+1+1 & \text{(partition 2)} \\ & = & 2+2+1 & \text{(partition 3)} \\ & = & 3+1+1 & \text{(partition 4)} \\ & = & 3+2 & \text{(partition 5)} \\ & = & 4+1 & \text{(partition 6)} \\ & = & 5 & \text{(partition 7).} \end{array}$$