

EXERCICE 1

Polynôme de Laguerre et méthode de quadrature de Gauss

Dans tout l'exercice, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie I - Produit Scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$

I.1 - Généralités

Pour tout couple $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, on note :

$$(P | Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt.$$

Q1. Justifier que l'intégrale définissant $(P | Q)$ est convergente.

Q2. Montrer que l'application $(\cdot | \cdot) : \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}$ est un produit scalaire.

I.2 - Calcul d'un produit scalaire

Q3. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. A l'aide d'une intégration par parties, établir que :

$$\int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt = k \int_0^{+\infty} t^{k-1} e^{-t} dt.$$

Q4. Conclure que $(X^k | 1) = k!$ pour tout entier $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

Partie II - Construction d'une base orthogonale

On considère l'application α définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \alpha(P) = XP'' + (1 - X)P'.$$

II.1 - Propriétés de l'application α

Q5. Montrer que α est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Q6. Écrire la matrice de α dans la base $(1, X, \dots, X^n)$.

Q7. En déduire que α est diagonalisable et que $\text{Sp}(\alpha) = \{-k \mid k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$.

II.2 - Vecteurs propres de l'application α

On fixe un entier $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

Q8. Quelle est la dimension de $\ker(\alpha + k \text{Id}_{\mathbb{R}_n[X]})$?

Q9. En déduire qu'il existe un unique polynôme $P_k \in \mathbb{R}_n[X]$, de coefficient dominant égal à 1, vérifiant $\alpha(P_k) = -kP_k$.

Q10. Justifier que P_k est de degré k .

Q11. Déterminer P_0 et P_1 . Vérifier que $P_2 = X^2 - 4X + 2$.

II.3 - Orthogonalité de la famille (P_0, \dots, P_n)

On fixe un couple $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$.

Q12. Montrer que $(\alpha(P) | Q) = -\int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)e^{-t} dt$.

Q13. En déduire que $(\alpha(P) | Q) = (P | \alpha(Q))$.

Q14. Montrer que (P_0, \dots, P_n) est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$. On pourra utiliser **Q9** et **Q13**.

Partie III - Méthode de quadrature de Gauss

On admet que le polynôme P_n admet n racines réelles **distinctes** que l'on note x_1, \dots, x_n .

On souhaite montrer qu'il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \quad \int_0^{+\infty} P(t)e^{-t} dt = \sum_{i=1}^n \lambda_i P(x_i). \quad (*)$$

Q15. Montrer qu'un n -uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ vérifie $(*)$ si et seulement si :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0! \\ 1! \\ \vdots \\ (n-1)! \end{pmatrix}.$$

Q16. En déduire qu'il existe un unique n -uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $(*)$

Q17. Déterminer un polynôme $P \in \mathbb{R}_{2n}[X]$ tel que :

$$\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t} dt \neq \sum_{i=0}^n \lambda_i P(x_i).$$