

Programme de colles MP 2017.

Semaine 6

Espaces vectoriels normés

Questions de cours :

1. Exposez vos connaissances sur les normes et les distances associées en illustrant par des exemples.
2. Exposez vos connaissances sur les parties bornées d'un e.v.n en illustrant par des exemples.
3. Exposez vos connaissances sur les suites convergentes dans un e.v.n.
4. Exercice 1 de la banque CCP (analyse)
5. Exercice 71 de la banque CCP (algèbre)
6. Exercice 93 de la banque CCP (algèbre)

Détails des questions de cours :

1. Exposez vos connaissances sur les normes et les distances associées en illustrant par des exemples.
 - Définition d'une norme. Exemples en dimension finie et en dimension infinie.
 - Norme produit.
 - Vecteurs unitaires - sphère unité. Exemples dans \mathbb{R}^2 .
 - Définition d'une distance. Exemple de distance associée à une norme.
 - Boules. Boules unités fermée et ouverte. Les boules sont convexes (★)
2. Exposez vos connaissances sur les parties bornées d'un e.v.n en illustrant par des exemples.
 - Parties bornées d'un espace vectoriel. Définition. Exemples.
 - En dimension finie, si X est bornée pour une des normes usuelles, tout vecteur de X possède des coordonnées majorées en module par une constante et dans ce cas, la partie est bornée pour toute autre norme.
 - Contre exemple en dimension infinie (★).
 - Définition d'une suite bornée, d'une fonction bornée à valeurs dans un espace vectoriel.
 - Toute union finie de parties bornées est bornée, l'intersection quelconque de parties bornées est bornée (★).
 - Contre exemple pour l'union quelconque.
3. Exposez vos connaissances sur la notion de suites convergentes dans un e.v.n.
 - Définition.
 - Une suite convergente est bornée (★).
 - Unicité de la limite (★).
 - Théorèmes opératoires sur les suites convergentes.
 - En dimension finie, la convergence d'une suite ne dépend pas du choix de la norme.
 - Comparaison asymptotique : définitions et caractérisations.