

**Exercice cours MPSI :**

Déterminer l'ensemble des entiers naturels  $n$  tels que  $\left(\frac{(1-i\sqrt{3})^5}{(1-i)^3}\right)^n$  soit un réel positif

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout réel  $x$ , calculer :

$$C_n(x) = \sum_{k=0}^n \cos(kx) \text{ et } S_n(x) = \sum_{k=0}^n \sin(kx).$$

**Exercice 1 :**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  ayant  $n$  valeurs propres distinctes  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ .

1. Montrer que l'ensemble  $C_A = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) / AM = MA\}$  des matrices carrées de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  qui commutent avec  $A$  est un espace vectoriel.
2. a. Soit  $B$  un élément de  $C_A$ . Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $A$ . Montrer que  $\forall X \in E_\lambda, BX \in E_\lambda$ .
3. Montrer que  $\text{Vect}(\mathbf{I}_n, A, A^2, \dots, A^{n-1}) \subset C_A$ .
4. On veut maintenant étudier l'indépendance linéaire de la famille  $\{\mathbf{I}_n, A, A^2, \dots, A^{n-1}\}$ . Pour cela, on considère  $n$  réels  $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$  tels que  $\sum_{i=0}^n \alpha_i A^i = 0$ .
  - a. Montrer que les  $(\alpha_i)$  sont solution du système :

$$(*) \begin{cases} \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_1^2 + \dots + \alpha_{n-1} \lambda_1^{n-1} = 0 \\ \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_2 + \alpha_2 \lambda_2^2 + \dots + \alpha_{n-1} \lambda_2^{n-1} = 0 \\ \vdots \\ \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_n + \alpha_2 \lambda_n^2 + \dots + \alpha_{n-1} \lambda_n^{n-1} = 0 \end{cases}$$

$$\text{b. Démontrer par récurrence sur } n \text{ que : } \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i).$$

- c. En déduire l'ensemble des solutions du système (\*) et conclure.
5. On admet que  $\dim(C_A)$  est de dimension  $n$  (les 5/2 pourront le démontrer). Montrer que  $C_A = \text{Vect}(\mathbf{I}_n, A, A^2, \dots, A^{n-1})$ .

Conseils de lecture :

1. Exercice 84 d'algèbre de la banque CCP 2016
2. Exercice 89 d'analyse de la banque CCP 2016

Correction :

**Exercice MPSI :**

Pour mettre un complexe  $z$  non nul sous forme exponentielle, on divise par  $|z|$ .

Un complexe  $z$  est réel positif ssi  $\arg(z) = 2k\pi$  pour  $k \in \mathbb{Z}$ .

$$1 - i\sqrt{3} = 2e^{-i\pi/3} \text{ et } 1 - i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}.$$

$$\text{Donc } \left( \frac{(1 - i\sqrt{3})^5}{(1 - i)^3} \right)^n = (8\sqrt{2}e^{-11i\pi/12})^n \text{ est réel positif ssi } \arg((8\sqrt{2}e^{-11i\pi/12})^n) = -\frac{11n\pi}{12} = 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$

il est donc nécessaire que  $11n \in 24\mathbb{Z}$ . Comme 11 est premier avec 24, on doit avoir  $n \in 24\mathbb{Z}$ . Réciproquement, tout  $n \in 24\mathbb{N}$  convient.

Les solutions sont donc les éléments de  $24\mathbb{N}$ .

Si  $x \in 2\pi\mathbb{Z}$ , on a  $C_n(x) = n + 1$  et  $S_n(x) = 0$ .

$$\text{Sinon, } C_n(x) + iS_n(x) = \sum_{k=0}^n (e^{ix})^k = \frac{(e^{ix})^{n+1} - 1}{(e^{ix}) - 1}.$$

En factorisant par l'arc moitié en haut et en bas :

$$C_n(x) + iS_n(x) = \frac{(e^{i(n+1)x/2})}{(e^{ix/2})} \cdot \frac{(e^{i(n+1)x/2} - (e^{-i(n+1)x/2}))}{(e^{ix/2}) - (e^{-ix/2})}$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires, on trouve :

$$C_n(x) = \cos(nx/2) \frac{\sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)}$$

et

$$S_n(x) = \sin(nx/2) \frac{\sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)}$$

**Exercice 1 :**

1. Soit  $(M, N) \in C_A$ ,  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ .  $A(\lambda M + \mu N) = \lambda AM + \mu AN = \lambda MA + \mu NA = (\lambda M + \mu N)A$ . Donc  $C_A$  est un sous espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .
2. Soit  $X \in E_\lambda$ .  $ABX = BAX = B(\lambda X) = \lambda BX$  donc  $BX \in E_\lambda$ .
3.  $A \cdot A^i = A^i \cdot A$ . Donc  $\forall i \in \{0, \dots, n-1\}$ ,  $A^i \in C_A$ . Ainsi  $\text{Vect}(I_n, A, \dots, A^{n-1}) \subset C_A$ .
4. Soit  $X \in E_{\lambda_k} \setminus \{0\}$ .  $A^i X = \lambda_k^i X$ . Donc  $(\sum \alpha_i A^i)X = \sum \alpha_i A^i X = (\sum \alpha_i \lambda_k^i)X = 0$ . Or  $X \neq 0$ , donc il existe une coordonnée  $x_i \neq 0$  de  $X$  telle que  $(\sum \alpha_i \lambda_k^i)x_i = 0$  et finalement :  $\sum \alpha_i \lambda_k^i = 0$ .
5. C'est un déterminant de Vandermonde (transposé par rapport à ce qu'on a fait en cours). Les  $\lambda_k$  sont supposés être tous distincts. Donc ce déterminant est non nul donc le système associé est inversible. Il n'admet donc qu'un seul  $n$ -uplet solution qui est forcément le  $n$ -uplet  $(0, \dots, 0)$ .  
La famille  $(I_n, A, \dots, A^{n-1})$  est donc libre.
6. On a  $\dim \text{Vect}(I_n, A, \dots, A^{n-1}) = n = \dim C_A$  et  $\text{Vect}(I_n, A, \dots, A^{n-1}) \subset C_A$  donc  $\text{Vect}(I_n, A, \dots, A^{n-1}) = C_A$ .