Exercices en temps libre : Semaine 3

Exercice cours MPSI :

Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que $\left(\dfrac{(1-i\sqrt{3})^5}{(1-i)^3}\right)^n$ soit un réel positif

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout réel x, calculer :

$$C_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx) \text{ et } S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \sin(kx).$$

Exercice 1 :
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ayant n valeurs propres distinctes $\{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$.

1. Montrer que l'ensemble $C_A = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) / AM = MA\}$ des matrices carrées de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec A est un espace vectoriel.

2. **a.** Soit B un élément de C_A. Soit λ une valeur propre de A. Montrer que $\forall X \in E_\lambda, BX \in E_\lambda$.

3. Montrer que $\mathrm{Vect}(\mathrm{I_n}, A, A^2, ..., A^{n-1}) \subset C_A$.

4. On veut maintenant étudier l'indépendance linéaire de la famille $\{\mathrm{I_n}, A, A^2, ..., A^{n-1}\}$. Pour cela, on considère n réels $\alpha_0, ..., \alpha_{n-1}$ tels que $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i A^i = 0$.

a. Montrer que les (α_i) sont solution du système :

$$(*)\left\{\begin{array}{ccccccccccc} \alpha_0 & + & \alpha_1\lambda_1 & + & \alpha_2\lambda_1^2 & + & ... & + & \alpha_{n-1}\lambda_1^{n-1} & = & 0 \\ \alpha_0 & + & \alpha_1\lambda_2 & + & \alpha_2\lambda_2^2 & + & ... & + & \alpha_{n-1}\lambda_2^{n-1} & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_0 & + & \alpha_1\lambda_n & + & \alpha_2\lambda_n^2 & + & ... & + & \alpha_{n-1}\lambda_n^{n-1} & = & 0 \end{array}\right.$$

b. Démontrer par récurrence sur n que : $\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & ... & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & ... & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & ... & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\lambda_j - \lambda_i).$

c. En déduire l'ensemble des solutions du système $(*)$ et conclure.

5. On admet que $\dim(C_A)$ est de dimension n (les 5/2 pourront le démontrer).
Montrer que $C_A = \mathrm{Vect}(\mathrm{I_n}, A, A^2, ..., A^{n-1})$.

Conseils de lecture :

1. Exercice 84 d'algèbre de la banque CCP 2016

2. Exercice 89 d'analyse de la banque CCP 2016