Semaine 8 :

Mercredi :

1. Citer le lemme de décomposition des noyaux.
2. Donner la définition d'un ensemble borné dans un e.v.n. $(E, ||.||_E)$.
3. Démontrer que si (u_n) est une suite convergente vers ℓ et si ϕ est une extraction, alors $(u_{\phi(n)})$ est une suite convergente vers ℓ.
   En déduire une condition suffisante de divergence pour une suite (v_n) en terme de valeurs d'adhérence.
4. Donner la définition de N_1 et N_2 sont des normes équivalentes.
5. Donner la traduction optimale de (u_n) ne tend pas vers ℓ en terme de suite extraite.
6. Déterminer les solutions **réelles** de l'équation différentielle (E) : $y^{(3)} - y'' + y' - y = 0$

Vendredi :

1. Quelle est la définition de l'ordre d'un élément g d'un groupe G ? Quelles sont ses caractérisations ?
2. Démontrer rigoureusement que $||f||_{+\infty} = sup_{[0,1]}|f|$ est une norme sur $C([0,1], \mathbb{R})$
3. Rappeler le théorème de l'intégrale nulle.
4. Rappeler le théorème de Bolzano-Weierstrass.
5. Rappeler la définition de N_1 et N_2 sont des normes équivalentes. Donner des caractérisations de N_1 et N_2 sont des normes équivalentes.
6. Donner l'exemple de deux normes comparables mais non équivalentes.

Mercredi :

1. *Voir semaines précédentes. Attention d'écrire des choses qui ont du sens : on parlera de* $\mathrm{Ker}(P(f))$*...*
2. *Un ensemble* A *est borné dans* $(E, ||.||_E)$ *ssi* $\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall a \in A, ||a||_E \leqslant M$.
3. *Si* (u_n) *est une suite convergente vers* ℓ *et si* ϕ *est une extraction, soit* $\varepsilon > 0$. *Il existe* $N \in \mathbb{N}$, *tel que* $\forall n \geqslant N$, $||u_n - \ell|| \leqslant \varepsilon$. *Comme* ϕ *est une extraction,* $\phi(n) \geqslant n$ *et donc* $\forall n \geqslant N$, $||u_{\phi(n)} - \ell|| \leqslant \varepsilon$. *Donc* $(u_{\phi(n)})$ *converge vers* ℓ. *On en déduit qu'une suite convergente admet exactement une valeur d'adhérence.*
   Par contraposée, si (v_n) *admet au moins 2 valeurs d'adhérence,* (v_n) *est divergente.*
4. N_1 *et* N_2 *sont des normes équivalentes ssi* $\exists \alpha > 0, \exists \beta > 0, \forall u \in E, \alpha N_1(u) \leqslant N_2(u) \leqslant \beta N_1(u)$.
   Attention, les coefficients α *et* β *doivent être strictement positifs.*
5. (u_n) *ne tend pas vers* ℓ *ssi* $\exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geqslant N, ||u_n - \ell|| > \varepsilon$. *On peut donc construire par récurrence une suite extraite* $(u_{\phi(n)})$ *telle que* $||u_{\phi(n)} - \ell|| > \varepsilon$.
6. *L'équation caractéristique est* $P(r) = r^3 - r^2 + r - 1 = 0$ *dont* 1 *est racine. Donc* $r^3 - r^2 + r - 1 = (r-1)(r^2+1) = (r-1)(r-i)(r+i)$. *Par le lemme des noyaux, si* δ *est l'opérateur de dérivation, l'ensemble* S *des solutions de* (E) *est* $S = \mathrm{Ker}(P(f)) = \mathrm{Ker}(\delta - Id) \oplus \mathrm{Ker}(\delta + iId) \oplus \mathrm{Ker}(\delta - iId)$ *par le lemme des noyaux.*
   $S_{\mathbb{C}} = Vect(t \mapsto e^t) \oplus Vect(t \mapsto e^{it}) \oplus Vect(t \mapsto e^{-it})$
   et $S_{\mathbb{R}} = \{y : y \mapsto Ae^t + B\cos t + C \sin t | (A,B,C) \in \mathbb{R}^3\}$

Vendredi :

1. *Voir semaines précédentes.*
2. *Voir le cours : attention aux manipulations des bornes sup et penser à justifier qu'elles sont finies.*
3. *Si* f *est* **continue** *sur un intervalle* I, **positive** *et* **d'intégrale nulle**, *alors* f *est nulle sur* I.
4. *Dans un* $(E, ||.||)$ *est un e.v.n. de* **dimension finie**, *toute suite* **bornée** *admet au moins une valeur d'adhérence*
5. N_1 *et* N_2 *sont des normes équivalentes ssi* $\exists \alpha > 0, \exists \beta > 0, \forall u \in E, \alpha N_1(u) \leqslant N_2(u) \leqslant \beta N_1(u)$.
   N_1 *et* N_2 *sont équivalentes ssi elles définissent les mêmes ensembles bornés ssi elles définissent les mêmes suites convergentes vers les mêmes limites ssi elles définissent les mêmes voisinages*
6. *Les normes* $||.||_1$ *et* $||.||_\infty$ *sur* $E = C([0,1], \mathbb{R})$ *ne sont pas équivalentes : par exemple, la suite* (T_n) *des fonctions triangles vues dans le cours est bornée pour la norme* $||.||_1$ *mais pas pour la norme* $||.||_\infty$.