Semaine 6 :

Lundi : 2,87/7

1. Quels sont les idéaux de $(\mathbb{Z},+,\times)$? Démontrer votre affirmation.
2. Rappeler le théorème de structure des groupes monogènes.
3. Résoudre dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$, l'équation différentielle $y^{(3)}-y=0$
4. Définir l'assertion "les espaces $(F_i)_{i\in[1,n]}$ sont en somme directe".
5. Soit E un espace de dimension finie. Soit p une projection (non triviale) sur F parallèlement à G. Quel est le polynôme caractéristique de p ? le polynôme minimal de p ?
6. Citer le lemme de décomposition des noyaux.
7. Donner des énoncés équivalents à "f est un endomorphisme diagonalisable".

Mardi : 2,77/7

1. Quelle est la définition de l'ordre d'un élément g d'un groupe G ? Quelles sont ses caractérisations ?
2. Résoudre $z^n=(-2)$.
3. Donner les formules de changement de bases.
4. Une projection est elle diagonalisable ? Une symétrie est-elle diagonalisable ?
5. Démontrer que si P et Q sont premiers entre eux, $\operatorname{Ker}(PQ(f))=\operatorname{Ker}P(f)\oplus\operatorname{Ker}Q(f)$.
6. Donner des énoncés équivalents à "f est un endomorphisme trigonalisable".

Mercredi : 3,42/6

1. Énoncer le théorème d'Euler et donner sa démonstration.
2. Quelles sont les suites récurrentes réelles telles que $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+3}=3u_{n+2}-4u_n$? (on remarquera que $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est solution)
3. Qu'est ce qu'un invariant de similitude ? Donner 5 invariants de similitude.
4. E est de dimension finie égale à n. Quel est le polynôme caractéristique d'un endomorphisme nilpotent ?
5. Rappeler la formule de Grassmann.
6. Donner la définition de la signature d'une permutation.

Jeudi

1. Définir **le** PGCD des polynômes P et Q. Comment exploiter que P et Q sont premiers entre eux ?
2. Calculer $\sum_{k=0}^{n}\cos(kx)$ en prenant soin de ne pas diviser par 0.
3. Comment démontrer que les espaces $(F_i)_{i\in[1,n]}$ sont en somme directe ?
4. Caractérisation(s) d'un endomorphisme diagonalisable ?
5. Soit E de dimension n. Quelle est la dimension de E^p ? de $\mathcal{L}(E)$? de $(\mathcal{L}(E))^p$?
6. Rappeler l'énoncé du théorème du rang.

Vendredi

1. Rappeler le théorème des restes chinois et **en déduire** que si p et n sont premiers entre eux, $\varphi(np)=\varphi(n)\varphi(p)$
2. Appliquer le lemme de décomposition des noyaux aux polynômes minimaux d'une projection p puis d'une symétrie s.
3. Montrer que le spectre d'un endomorphisme f est inclus dans l'ensemble des racines de tout polynôme annulateur de f.
4. La matrice $A=\begin{pmatrix}1 & i\\ i & -1\end{pmatrix}$ est-elle trigonalisable ? diagonalisable ?
5. Soit f un endomorphisme en dimension finie. Quelle est la dimension de l'algèbre commutative $(\mathbb{K}[f],+,\circ,\cdot)$?
6. Donner la formule du déterminant d'une matrice A.

Semaine 6 :

Lundi

1. Quels sont les idéaux de $(\mathbb{Z},+,\times)$? Démontrer votre affirmation.
De manière générale, les idéaux d'un anneau euclidien $(A,+,\times)$ sont exactement les nA.
*Si I est un idéal de $(\mathbb{Z},+,\times)$: **1er cas :** si $I=\{0\}$, $I=0\mathbb{Z}$. **2ème cas :** si $I\neq\{0\}$. Alors par symétrie, $I\cap\mathbb{N}^*\neq\emptyset$. Soit $n_0=\min(\mathbb{N}^*\cap I)$.*
D'une part, $n_0\mathbb{Z}\subset I$ car I est un sous groupe additif.
D'autre part, si $a\in I$, il existe q,r tels que $a=n_0q+r$ et $0\leqslant r<n_0$. Comme $r=a-n_0q\in I$ et par statut de n_0, nécessairement, $r=0$ et $a\in n_0\mathbb{Z}$.

2. Rappeler le théorème de structure des groupes monogènes. *Soit G un groupe monogène.*
— *si G est fini de cardinal n, G est isomorphe à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$.*
— *si G est infini G est isomorphe à $(\mathbb{Z},+)$*

3. Résoudre dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$, l'équation différentielle $y^{(3)}-y=0$
L'équation caractéristique est $r^3-1=(r-1)(r^2+r+1)=(r-1)(r-j)(r-\overline{j})$.
D'après le lemme de décomposition des noyaux, si δ est l'opérateur de dérivation,

$$S=\operatorname{Ker}(\delta-Id)\oplus\operatorname{Ker}(\delta-j\mathrm{Id})\oplus\operatorname{Ker}(\delta-j^2Id)$$

Donc les solutions sont exactement les fonctions y est telles qu'il existe A,B,C complexes vérifiant $\forall x\in\mathbb{R}, y(x)=A\exp(x)+B\exp(jx)+C\exp(j^2x)$.

4. Définir le fait que les espaces $(F_i)_{i\in[1,n]}$ sont en somme directe.
Les espaces $(F_i)_{i\in[1,n]}$ sont en somme directe ssi

$$\phi:\begin{array}{rcl} F_1\times F_2\times\cdots\times F_n & \to & \sum_{i=1}^n F_i \\ (x_1,x_2,\dots,x_n) & \mapsto & x_1+x_2+\dots x_n\end{array}$$

est bijective.
C'est à dire que la décomposition de chaque $x\in\sum F_i$ est unique.
Par linéarité de ϕ, il suffit de vérifier que le noyau de cette application est réduit à $\{0\}$, c'est à dire que que si $(x_1,\dots x_n)\in F_1\times F_2\times\cdots\times F_n$ vérifie $x_1+\cdots+x_n=0_E$, alors $\forall i\in[1,n], x_i=0_E$

5. Soit E un espace de dimension finie. Soit p une projection (non triviale) sur F parallèlement à G. Quel est le polynôme caractéristique de p ? le polynôme minimal de p ?
$E=F\oplus G$. $\chi_p=(X-1)^{\dim F}X^{\dim G}$ *et* $\mu_p=X(X-1)$ *car* $Sp(f)=\{0,1\}$.

6. Citer le lemme de décomposition des noyaux.
Soit $P_1,\dots P_n$ sont des polynômes 2 à 2 premiers entre eux, si $P=\prod P_i$, si f est un endomorphisme, alors

$$\operatorname{Ker}P(f)=\oplus\operatorname{Ker}P_i(f)$$

7. Caractérisation(s) d'un endomorphisme diagonalisable ?
$\Updownarrow$
- *f est diagonalisable.*
- $E=\oplus_{\lambda\in Sp(f)}E_\lambda$
- *il existe une base propre pour f*
- *il existe un polynôme annulateur non nul de f scindé à racines simples.*
- *μ_f est scindé à racines simples*
- *$\prod_{\lambda\in Sp(f)}(X-\lambda)$ est un polynôme annulateur de f*
- $\forall\lambda\in Sp(f), dim(E_\lambda)=m_\lambda$

Mardi

1. Quelle est la définition de l'ordre d'un élément g d'un groupe G ? Quelles sont ses caractérisations ?
Soit G un groupe et $g\in G$.
L'application : $\varphi:(\mathbb{Z},+)\to(<g>,\cdot)$ telle que $\varphi(k)=g^k$ est surjective. Son noyau est un sousgroupe de $(\mathbb{Z},+)$, donc de la forme $n\mathbb{Z}$. Alors $\tilde{\varphi}:(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})\to(<g>,\cdot)$ est un isomorphisme de groupes. Alors :

— *si* $\{n \in \mathbb{N}^* | g^n = e_G\} \neq \emptyset$*, on pose* $O(g) = \min\{n \in \mathbb{N}^* | g^n = e_G\}$
Alors $O(g) = Card(< g >)$, $g^p = e_G \Leftrightarrow O(g)|p$ *et* $g^p = g^q \Leftrightarrow O(g)|p - q$.
— *sinon,* g *n'est pas d'ordre fini et* $g^p = e_G \Leftrightarrow p = 0$ *et* $g^p = g^q \Leftrightarrow p = q$.

2. Résoudre $z^n = (-2)$.
Une racine n*-ième de* $(-2) = 2e^{i\pi}$ *est égale à* $z_0 = \sqrt[n]{2}e^{i\pi/n}$. *Donc les racinces* n*-ième de* (-2) *sont* $\{\sqrt[n]{2}e^{i(2k+1)\pi/n}\}$

3. Donner les formules de changement de bases.
Si β *et* β' *sont des bases de* E*, si* P *est la matrice de passage de* β *dans* β'*, si* $f \in \mathcal{L}(E)$ *et* $u \in E$ *alors : en posant* $X = Mat_\beta(u)$, $X' = Mat_{\beta'}(u)$, $A = Mat_\beta(f)$, $B = Mat_\beta(f)$,
— $X = PX'$
— $B = P^{-1}AP$, $A = PBP^{-1}$ *et* $AP = PB$.

4. Une projection est elle diagonalisable ? Une symétrie est-elle diagonalisable ?
Toute projection est diagonalisable car si p *est une projection,* $X^2 - X = X(X-1)$ *est un polynôme annulateur de* p *qui est scindé à racines simples.*
De même, toute symétrie est diagonalisable car si s *est une symétrie,* $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$ *est un polynôme annulateur de* s *qui est scindé à racines simples.*

5. Démontrer que si P et Q sont premiers entre eux, $\mathrm{Ker}(PQ(f)) = \mathrm{Ker}\, P(f) \oplus \mathrm{Ker}\, Q(f)$.
Si $UP + VQ = 1$*, si* $x \in \mathrm{Ker}(PQ(f))$*, on pose* $x_1 = UP(f)(x)$ *et* $x_2 = VQ(f)(x)$ *de sorte que* $x_1 + x_2 = (UP + VQ)(f)(x) = (1(f))(x) = Id(x) = x$.
De plus, $Q(f)(x_1) = QUP(f)(x) = UPQ(f)(x) = U(f)(0) = 0$ *et* $P(f)(x_2) = 0$.
Donc $\mathrm{Ker}(PQ(f)) = \mathrm{Ker}\, P(f) + \mathrm{Ker}\, Q(f)$.
Enfin, la somme est directe car si $x \in \mathrm{Ker}\, P(f) \cap \mathrm{Ker}\, Q(f)$*, alors* $x = (UP + VQ)(f)(x) = 0 + 0 = 0$.

6. Caractérisation(s) d'un endomorphisme trigonalisable ?
$\Updownarrow$
- f *est trigonalisable.*
- *il existe un drapeau adapté à* f
- *il existe un polynôme annulateur non nul de* f *scindé*
- μ_f *est scindé*
- *(en DF)* χ_f *est scindé*

Mercredi

1. Énoncer le théorème d'Euler et donner sa démonstration.
Si x *et* n *sont premiers entre eux,* $x^{\varphi(n)} \equiv 1[n]$.
En effet, $\overline{x}$ *est inversible dans* $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. *Donc par théorème de Lagrange,* $\overline{x}^{Card\ (\mathbb{Z},n\mathbb{Z})^*} = \overline{1}$ *et* $Card\ (\mathbb{Z}, n\mathbb{Z})^* = \varphi(n)$.

2. Quelles sont les suites récurrentes réelles telles que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 3u_{n+2} - 4u_n$? (on remarquera que $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est solution)
L'équation caractéristique est $r^3 - 3r^2 + 4 = (r+1)(r^2 - 4r + 4) = (r+1)(r-2)^2 = 0$.
D'après le lemme des noyaux, si T *est l'opérateur de shift,*

$$S = \mathrm{Ker}(T + Id) \oplus \mathrm{Ker}(T - Id)^2$$

Donc les solutions sont exactement les suites u *telles qu'il existe* A, B, C *réelles vérifiant* $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = A(-1)^n + (Bn + C)2^n$.

3. Qu'est ce qu'un invariant de similitude ? Donner 5 invariants de similitude.
Un invariant de similitude est une fonction constante sur les classes d'équivalence de la relation $A \sim B \Leftrightarrow \exists P \in GL_n, A = PBP^{-1}$.
Par exemple, le rang, la trace, le déterminant, le polynôme caractéristique, le polynôme minimal, les valeurs propres, le spectre sont des invariants de similitude.

4. E est de dimension finie égale à n. Quel est le polynôme caractéristique d'un endomorphisme nilpotent ?
Si f *est nilpotent,* $\chi_f = X^n$.

5. Rappeler la formule de Grassmann.
En dimension finie, $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$

6. Donner la définition de la signature d'une permutation.
Si σ *est une permutation, sa signature est égale à* $(-1)^{I(\sigma)}$ *où* $I(\sigma)$ *est le nombre d'inversions de* σ.
On a aussi $\varepsilon(\sigma) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \dfrac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}$.
C'est un morphisme de groupes.

Jeudi

1. Définir **le** PGCD des polynômes P et Q. Comment exploiter que P et Q sont premiers entre eux ?
Le PGCD unitaire des polynômes P et Q est l'unique polynôme unitaire qui engendre l'idéal $P\mathbb{K}[X]+Q\mathbb{K}[X]$.
P et Q sont premiers entre eux ssi $\exists(U,V)\in\mathbb{K}[X]^2, UP+VQ=1$.

2. Calculer $\sum_{k=0}^{n}\cos(kx)$ en prenant soin de ne pas diviser par 0.
Si $x\equiv 0[2\pi]$, $\sum_{k=0}^{n}\cos(kx)=n+1$.
Soit $x\notin 2\pi\mathbb{Z}$, alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\cos(kx) &= \sum_{k=0}^{n} Re(e^{ikx}) \\
&= \sum_{k=0}^{n} Re(e^{ikx}) = Re\left(\sum_{k=0}^{n}(e^{ix})^k\right) \\
&= Re\left(\frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}}\right) = Re\left(e^{inx/2}\frac{2i\sin(n+1)x}{\sin x}\right) \\
&= \frac{\cos(nx/2)\sin(n+1)x/2}{\sin x/2}
\end{aligned}$$

3. Comment démontrer que les espaces $(F_i)_{i\in[1,n]}$ sont en somme directe ?
Par linéarité de ϕ, il suffit de vérifier que le noyau de cette application est réduit à $\{0\}$, c'est à dire que que si $(x_1,\dots x_n)\in F_1\times F_2\times\cdots\times F_n$ vérifie $x_1+\cdots+x_n=0_E$, alors $\forall i\in[1,n], x_i=0_E$

4. Caractérisation(s) d'un endomorphisme diagonalisable ?

- *f est diagonalisable.*
- $E=\oplus_{\lambda\in Sp(f)}E_\lambda$
- *il existe une base propre pour f*
- *il existe un polynôme annulateur non nul de f scindé à racines simples.*
- *μ_f est scindé à racines simples*
- *$\prod_{\lambda\in Sp(f)}(X-\lambda)$ est un polynôme annulateur de f*
- $\forall\lambda\in Sp(f), dim(E_\lambda)=m_\lambda$

5. Soit E de dimension n. Quelle est la dimension de E^p ? de $\mathcal{L}(E)$? de $(\mathcal{L}(E))^p$?
$\dim E^p=np$, $\dim\mathcal{L}(E)=n^2$ *et* $\dim((\mathcal{L}(E))^p)=p\times n^2$.

6. Rappeler l'énoncé du théorème du rang.
Si f est un endomorphisme de E de dimension finie, $\dim(E)=\dim\mathrm{Ker}(f)+\mathrm{rg}(f)$.

Vendredi

1. Rappeler le théorème des restes chinois et **en déduire** que si p et n sont premiers entre eux, $\varphi(np)=\varphi(n)\varphi(p)$
Si n et p sont premiers entre eux, l'application $\phi:\mathbb{Z}/np\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\times Z/p\mathbb{Z}$ définie par $\phi(x\ mod\ np)=(x\ mod\ n, x\ mod\ p)$ est un isomorphisme d'anneaux.
En particulier, les inversibles de $\mathbb{Z}/np\mathbb{Z}$ s'envoient exactement sur les inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\times Z/p\mathbb{Z}$. Donc par cardinalité : $\varphi(np)=\varphi(n)\varphi(p)$.

2. Appliquer le lemme de décomposition des noyaux aux polynômes minimaux d'une projection p puis d'une symétrie s.
D'après le lemme des noyaux et le théorème de Cayley-Hamilton, pour p projection et s symétrie,
$E=\mathrm{Ker}(p^2-p)=\mathrm{Ker}(p-Id)\oplus\mathrm{Ker}\,p$ *et* $E=\mathrm{Ker}(s^2-Id)=\mathrm{Ker}(s-Id)\oplus\mathrm{Ker}(s+Id)$

3. Montrer que le spectre d'un endomorphisme f est inclus dans l'ensemble des racines de tout polynôme annulateur de f.
Par récurrence, on montre que $\forall k\in\mathbb{N}, f^k(x)=\lambda^k x$.
Par linéarité, si $P=\sum a_kX^k$, $P(f)(x)=\sum(a_kf^k(x))=\sum(a_k\lambda^kx)=(\sum a_k\lambda^k)x=P(\lambda)x$.
Si x est un vecteur propre de f associé à λ, en particulier, $x\neq 0$ et $P(f)(x)=0$. Donc $P(\lambda)=0$.

4. La matrice $A=\begin{pmatrix}1 & i\\ i & -1\end{pmatrix}$ est-elle trigonalisable ? diagonalisable ?

$\chi_A = (X-1)(X+1)+1 = X^2$. Donc $Sp(A)$ est un singleton. Si A était diagonalisable, A devrait être semblable à 0, donc nulle. Donc A n'est pas diagonalisable.

Par contre, A est trigonalisable comme toute matrice complexe et remarquons que A est symétrique...

5. Soit f un endomorphisme en dimension finie. Quelle est la dimension de l'algèbre commutative $(\mathbb{K}[f], +, \times, \cdot)$?

f admet un polynôme minimal car l'idéal I_f des polynômes annulateurs de f n'est pas réduit à $\{0\}$.
Alors $(Id, f, \ldots f^{d-1})$ est une base de $\mathbb{K}[f]$ et $dim(\mathbb{K}[f]) = d$ où $d = deg(\mu_f)$

6. Donner la formule du déterminant d'une matrice A.

$det((a_{i,j})) = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$

7. Donner les formules de changement de bases.

Si β et β' sont des bases de E, si P est la matrice de passage de β dans β', si $f \in \mathcal{L}(E)$ et $u \in E$ alors : en posant $X = Mat_\beta(u)$, $X' = Mat_{\beta'}(u)$, $A = Mat_\beta(f)$, $B = Mat_\beta(f)$,

— $X = PX'$

— $B = P^{-1}AP$, $A = PBP^{-1}$ et $AP = PB$.