Exercices en temps libre : Semaine 5

Exercice 1 :

On note $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le polynôme caractéristique de A.

2. La matrice A est-elle diagonalisable ?

3. Déterminer un vecteur X tel que $A^2X \neq 0$ et en déduire que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 :

On note $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $P = X^5 + X + 1$.

Résoudre l'équation $P(M) = B$ en diagonalisant la matrice B.

Exercice 3 :

Résoudre les systèmes différentiels $X' = AX$ puis $Z' = BZ$ avec A et B les matrices des exercices 1 et 2.

Exercices en temps libre : Semaine 5

Exercice 1 :

On note $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le polynôme caractéristique de A.

2. La matrice A est-elle diagonalisable ?

3. Déterminer un vecteur X tel que $A^2X \neq 0$ et en déduire que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 :

On note $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $P = X^5 + X + 1$.

Résoudre l'équation $P(M) = B$ en diagonalisant la matrice B.

Exercice 3 :

Résoudre les systèmes différentiels $X' = AX$ puis $Z' = BZ$ avec A et B les matrices des exercices 1 et 2.

Correction :
Exercice 1 :

1. On trouve $\chi_A = X^3$.
2. Donc $Sp(A) = \{0\}$.
   On peut vérifier par le calcul que $\ker(A) \neq \mathbb{R}^3$, ce qui assure que $\dim(E_0) \neq m_0$ donc A n'est pas diagonalisable.
   MAIS ICI, le raisonnement qui suit est classique et doit être connu de TOUS : il peut s'adapter dès que A n'admet qu'une seule valeur propre.
   Si par l'absurde, A était diagonalisable, A serait semblable à la matrice nulle, donc égale à la matrice nulle. Contradiction. Finalement, A n'est pas diagonalisable.
3. On calcule $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ non nulle et par exemple, $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ n'est pas dans le noyau de A^2. En utilisant la méthode vue en classe, on pose alors $X_2 = AX_3$, $X_1 = AX_2 = A^2X_3$.
   Par contruction, $AX_1 = 0$ car $AX_1 = A^3X_3 = 0$. La matrice $P = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ X_1 & X_2 & X_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ est telle que $P^{-1}AP = T$ avec $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 2 :
On trouve $\chi_B = (X+1)(X-1)(X-3)$, $E_1 = Vect({}^t(1,1,0))$, $E_3 = Vect({}^t(1,1,-1))$ et $E_{-1} = Vect({}^t(0,1,0))$.
On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, alors $B = PDP^{-1}$.
Soit alors $M' = PMP^{-1}$. Alors $M^5 + M + I = B \Leftrightarrow M'^5 + M' + I = D$. Or M' et D commutent car D est un polynôme en M'. Donc les sous espaces propres de D sont stables par M'. Ces sous espaces propres sont des DROITES propres car D a des valeurs propres deux à deux distinctes.
La matrice M' est DONC diagonale (i.e. M et B sont co-diagonalisables) - remarque : on peut retrouver ce résultat par le calcul matriciel, mais c'est un peu plus long -
Donc $M' = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$. On cherche donc α tel que $\alpha^5 + \alpha + 1 = 1$.
La fonction $x \mapsto x^5 + x + 1$ est continue et strictement croissante de $-\infty$ vers $+\infty$. Elle est donc bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par le théorème de la bijection.
Il existe donc une unique valeur α réelle telle que $\alpha^5 + \alpha + 1 = 1$. Donc $\alpha = 0$.
De même, il existe une unique valeur β réelle telle que $\beta^5 + \beta + 1 = -1$ donc $\beta = -1$ et une unique valeur γ réelle telle que $\gamma^5 + \gamma + 1 = 3$ donc $\gamma = 1$.
Finalement, $M' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $M = PM'P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 :
En posant $X = PY$, le système $X' = AX$ est équivalent à $Y' = TY$, c'est à dire :

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ y_3' = 0 \end{cases}$$

dont les solutions sont $y_3(t) = C_1$, $y_2(t) = C_1t + C_2$ et $y_1(t) = C_1t^2/2 + C_2t + C_3$ avec C_1, C_2, C_3 réels.
On en déduit que $X = PY = \begin{pmatrix} t \mapsto y_2(t) + y_3(t) \\ t \mapsto 2y_1(t) + y_2(t) \\ t \mapsto 2y_1(t) + 2y_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \mapsto C_1t + C_1 + C_2 \\ t \mapsto C_1t^2 + (C_1 + 2C_2)t + (C_2 + 2C_3) \\ t \mapsto C_1t^2 + 2(C_1 + C_2)t + 2(C_2 + C_3) \end{pmatrix}$.
Finalement, $X \in Vect\left(t \mapsto \begin{pmatrix} t+1 \\ t^2+t \\ t^2+2t \end{pmatrix}, t \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 2t+1 \\ t+2 \end{pmatrix}, t \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$
Pour $Z' = BZ$, toujours en posant $Z = PY$, le système différentiel est équivalent à $Y' = DY$ dont les solutions $Y(t)$ ont les coordonnées : $y_1(t) = C_1\exp(t)$, $y_2(t) = C_2\exp(-t)$ et $y_3(t) = C_3\exp(3t)$.

Alors $Z = PY = \begin{pmatrix} t \mapsto C_1 \exp(t) + C_3 \exp(3t) \\ C_1 \exp(t) + C_2 \exp(-t) + C_3 \exp(3t) \\ -C_3 \exp(3t) \end{pmatrix}$

Donc $Z \in Vect\left(t \mapsto \exp(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, t \mapsto \exp(-t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, t \mapsto \exp(3t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$