Semaine 5 :

Lundi : 3,48/5

1. **1.** Donner l'énoncé mathématique de l'affirmation : " la famille $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ est une famille libre. "
   Précisez les étapes d'une démonstration de cette affirmation en utilisant un raisonnement par récurrence.
2. **2.** Citer le théorème d'Euler dans l'anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$.
3. **3.** Compléter la définition suivante par 4 énoncés équivalents :

$$\text{Soit } M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ et } \lambda \in \mathbb{K}. \text{ Alors : } \Updownarrow \begin{array}{l} \bullet\ \lambda \text{ est une valeur propre de } M. \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array}$$

4. **4.** Donner la définition du polynôme caractéristique de M.
5. **5.** Si $\chi_M = \sum a_k X^k$, précisez les valeurs de a_0, a_{n-1} et a_n.

Mardi : 3,29/5

1. **1.** Quels sont les idéaux de $\mathbb{R}[X]$?
2. **2.** Quel est le polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire ?
3. **3.** Quel est le polynôme caractéristique de la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$
4. **4.** Rappeler la formule du déterminant.
5. **5.** Rappeler les formules de changement de bases.

Mercredi : 3,14/5

1. **1.** Donner la définition d'un groupe. On écrira les propriétés à vérifier en langage mathématique.
2. **2.** Rappeler la formule du déterminant de Vandermonde (on écrira la matrice correspondante)
3. **3.** Donner une base et la dimension de l'ensemble des matrices triangulaires supérieures, puis de l'ensemble des matrices antisymétriques.
4. **4.** Rappeler la définition du polynôme annulateur d'une matrice carrée.
5. **5.** Quel est le polynôme minimal de aI_n pour $a \in \mathbb{K}$.

Jeudi : 3,68/5

1. **1.** Citer le théorème de Lagrange pour les groupes.
2. **2.** Quel est le polynôme minimal d'une matrice triangulaire dont les coefficients diagonaux sont 2 à 2 distincts.
3. **3.** Quelle est la formule générale de $E_{i,j}E_{k,l}$
4. **4.** Quel est le polynôme caractéristique de aI_n pour $a \in \mathbb{K}$.
5. **5.** Quel sont les polynômes caractéristique et minimal de $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Vendredi : 3,5/5

1. **1.** Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Quelle est la dimension de l'algèbre $(\mathbb{K}[M], +, \times, \cdot)$?
2. **2.** Rappeler les formules de changement de bases.
3. **3.** Justifier que toute matrice de $\mathcal{M}_{2k+1}(\mathbb{R})$ admet au moins une valeur propre réelle.
4. **4.** Citer au moins 5 invariants de similitude.
5. **5.** Citer le théorème des restes chinois et donner un exemple d'application.

Lundi

1. Voir semaine 4
2. Voir semaine 4
3. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors : $\Updownarrow \begin{array}{l} \bullet\ \lambda \text{ est une valeur propre de } M. \\ \bullet\ M - \lambda I_n \text{ est non inversible.} \\ \bullet\ Ker(M - \lambda I_n) \neq \{0\} \\ \bullet\ \exists X_0 \neq 0, MX_0 = \lambda X_0 \\ \bullet\ det(\lambda I_n - M) = 0 \end{array}$
4. Voir semaine 4.
5. Voir semaine 4.

Mardi

1. Voir semaine 4.
2. Quel est le polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire ?
   $\chi_M = \prod_{i=1}^n a_{i,i}$.
3. Quel est le polynôme caractéristique de la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$
   $\chi_A = X^4 - 4X^3 + 3X^2 - 2X + 1$
4. Voir semaine 4.
5. Rappeler les formules de changement de bases.
   Si $P = P_\beta^{\beta'}$ est la matrice de passage de l'ancienne base β vers la nouvelle base β', alors $P_\beta^{\beta'}$ est la matrice de l'identité depuis la base de départ β' vers la base d'arrivée β. Alors si X est la matrice des coordonnées d'un vecteur u exprimé dans la base β et X' celle des coordonnées du même vecteur dans la base β', alors $X = PX'$.
   Si f est un endomorphisme dont la matrice dans la base β est A et celle dans la base β' est B alors $B = P^{-1}AP$.

Mercredi

1. Voir semaine 4
2. Rappeler la formule du déterminant de Vandermonde (on écrira la matrice correspondante)

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \dots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i).$$

3. Voir semaine 4.
4. Rappeler la définition du polynôme annulateur d'une matrice carrée.
   Pour une matrice M, l'ensemble des polynômes annulateurs de M est un idéal non réduit à $\{0\}$ par exemple par le théorème de Cayley-Hamilton. Ce idéal est monogène. Le polynôme annulateur de la matrice carrée M est le générateur unitaire de l'idéal annulateur de M.
5. Quel est le polynôme minimal de aI_n pour $a \in \mathbb{K}$.
   $\mu_{aI_n} = (X - a)$ *pour* $a \in \mathbb{K}$.

Jeudi

1. Voir semaine 4

2. Quel est le polynôme minimal d'une matrice triangulaire dont les coefficients diagonaux sont 2 à 2 distincts.
$\mu_M = \chi_M = \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}$

3. Voir semaine 4

4. Quel est le polynôme caractéristique de aI_n pour $a \in \mathbb{K}$.
$\chi_{aI_n} = (X-a)^n$ *pour* $a \in \mathbb{K}$.

5. Quel sont les polynômes caractéristique et minimal de $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Si $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\chi_M = X^2 - X + 1 = (X - e^{i\pi/3})(X - e^{-i\pi/3})$. *Comme* $\mu_M | \chi_M$ *et* $\mu_M \in \mathbb{R}[X]$, *on en déduit que* $\mu_M = \chi_M$.

Vendredi

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Quelle est la dimension de l'algèbre $(\mathbb{K}[M], +, \times, \cdot)$?
$dim(\mathbb{K}[M], +, \times, \cdot) = d$ *où* $d = deg(\mu_M)$.

2. Voir semaine 5

3. Justifier que toute matrice de $\mathcal{M}_{2k+1}(\mathbb{R})$ admet au moins une valeur propre réelle.
Si $M \in \mathcal{M}_{2k+1}(\mathbb{R})$, χ_M *est un polynôme réel de degré impair. Par théorème des valeurs intermédiaires,* χ_M *admet au moins une racine. Comme* $Sp_{\mathbb{R}}(M) = Racines(\chi_M)$, M *admet au moins une valeur propre réelle.*

4. Voir semaine 4

5. Citer le théorème des restes chinois et donner un exemple d'application.
Si n *et* p *sont premiers entre eux, l'application* $\phi : \mathbb{Z}/np\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times Z/p\mathbb{Z}$ *définie par* $\phi(x \mod np) = (x \mod n, x \mod p)$ *est un isomorphisme d'anneaux.*

Si $nu + pv = 1$, *les solutions du système* $\left\{ \begin{array}{l} x \equiv a[n] \\ x \equiv b[p] \end{array} \right.$ *sont les* $x \equiv x_0[np]$ *où* $x_0 = nub + pva$.

On peut aussi en déduire que si n *et* p *sont premiers entre eux,* $\varphi(np) = \varphi(n)\varphi(p)$.