Semaine 4 :

Lundi (moyenne : 2,72/4)

1. Donner les étapes de la démonstration d'une proposition du type :

$$\forall (x,y) \in X \times Y, [(P(x) \text{ et } P(y)) \Rightarrow (Q(x) \text{ ou } Q(y)].$$

2. Rappeler la formule du déterminant d'une matrice.

3. Citer des propriétés de la fonction déterminant ?

4. Citer le théorème d'Euler dans l'anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$.

Mardi (moyenne : 1,86/4)

1. Donner l'énoncé mathématique de l'affirmation : " la famille $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ est une famille libre. "

2. Quels sont les idéaux de $\mathbb{R}[X]$?

3. Soit $\phi : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ définie par $\phi(f) = f - f'$.
Montrer que ϕ est linéaire puis déterminer son noyau.

4. Donner l'exemple d'un groupe de cardinal 6 non commutatif.

Mercredi : (moyenne : 2,96/5)

1. Donner les étapes d'une rédaction de la démonstration de l'affirmation : " la famille $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ est une famille libre. "

2. Donner la définition d'un groupe. On écrira les propriétés à vérifier en langage mathématique.

3. Calculer la signature de la permutation

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

4. Donner une base et la dimension de l'ensemble des matrices triangulaires supérieures, puis de l'ensemble des matrices antisymétriques.

5. Donner la définition du polynôme caractéristique d'une matrice carrée.

Jeudi : (moyenne : 2,62/5)

1. Citer le théorème de Lagrange pour les groupes.

2. Donner la définition de $\varphi(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ (indicatrice d'Euler).

3. Que valent les produits matriciels suivants : $E_{3,7}E_{6,7}$? $E_{3,7}E_{7,6}$? $E_{6,7}E_{7,3}$? Quelle est la formule générale de $E_{i,j}E_{k,l}$

4. Si $\chi_A = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ est le polynôme caractéristique de A, que valent a_0, a_{n-1} et a_n ?

5. Qu'appelle-t-on un invariant de similitude ?

Vendredi : (moyenne : 3,10/6)

1. Donner la définition mathématique d'une valeur propre d'une matrice M ?

2. Qu'appelle-t-on le sous espace propre associé ?

3. Donner la définition du polynôme minimal d'une matrice M.

4. Justifier que toute matrice de $\mathcal{M}_{2k+1}(\mathbb{R})$ admet au moins une valeur propre réelle.

5. Citer au moins 5 invariants de similitude.

6. Citer le théorème des restes chinois et donner un exemple d'application.

Lundi

1. Donner les étapes de la démonstration d'une proposition du type :

$$\forall (x,y) \in X \times Y, [(P(x) \text{ et } P(y)) \Rightarrow (Q(x) \text{ ou } Q(y)].$$

Soit $(x,y) \in X \times Y$ tel que $P(x)$, $P(y)$ soient vraies et $Q(x)$ soit fausse. Montrons que $Q(y)$ est vraie.

2. Rappeler la formule du déterminant d'une matrice.
$det((a_{i,j})) = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$

3. Quelles sont les propriétés de la fonction déterminant ?
La fonction déterminant det : $E^n \to \mathbb{K}$ est une forme n-linéaire alternée, antisymétrique.
Pour des matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on montre alors que :

- $det(A) = det({}^tA)$,
- $det(AB) = det(A)det(B)$,
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, det(\lambda A) = \lambda^n det(A)$
- *et* $det(A^{-1}) = \dfrac{1}{det(A)}$ *si A est inversible.*

4. Citer le théorème d'Euler dans l'anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $x \in \mathbb{Z}$, si x est premier avec n, alors $x^{\varphi(n)} \equiv 1[n]$.

Mardi

1. Donner l'énoncé mathématique de l'affirmation : " la famille $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ est une famille libre dans le $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. "
Toute sous famille finie de $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ est libre, c'est à dire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n, \forall (\lambda_1, \ldots \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \sum \lambda_i f_{a_i} = 0 \Rightarrow \forall i \in [1,n], \lambda_i = 0.$$

2. Donner les étapes de la rédaction de sa démonstration (on procèdera par récurrence).
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $H_n : \forall (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n, \forall (\lambda_1, \ldots \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \sum \lambda_i f_{a_i} = 0 \Rightarrow \forall i \in [1,n], \lambda_i = 0$.
Initialisation : Soit $a \in \mathbb{R}$. On vérifie que$f_a \neq 0$ donc (f_a) est libre.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que H_n est vraie.
Soit $(a_1, \ldots a_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et $(\lambda_i)_{i\in[1,n+1]} \in \mathbb{K}^{n+1}$ tels que $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f_{a_i} = 0$.
On montre que $\lambda_{n+1} = 0$, puis on utilise l'hypothèse de récurrence pour conclure que H_{n+1} est vraie.

3. Soit $\phi : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ définie par $\phi(f) = f - f'$.
Montrer que ϕ est linéaire puis déterminer son noyau.
Soit f, g dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
$\phi(\lambda f + g) = \lambda f + g - (\lambda f + g)' = \lambda(f - f') + (g - g')$ par linéarité de la dérivation.
Donc $\phi(\lambda f + g) = \lambda\phi(f) + \phi(g)$ et ϕ est liénaire.
$Ker\phi = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) | f - f' = 0\} = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) | \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = Ae^x\}$ d'après le théorème de structure de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

4. Donner l'exemple d'un groupe de cardinal 6 non commutatif.
Le groupe des permutations de $[1,3]$.

Mercredi

1. Donner la définition d'un groupe. On écrira les propriétés à vérifier en langage mathématique.
Soit G un ensemble non vide. Le couple $(G, \cdot)$ est un groupe ssi :

— $\forall (x,y) \in G^2, x \cdot y \in G$ *(loi interne)*
— $\forall (x,y,z) \in G^3, (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ *(loi associative)*
— $\exists e \in G, \forall x \in G, x \cdot e = e \cdot x = x$ *(il existe un neutre)*
— $\forall x \in G, \exists y \in G, x \cdot y = y \cdot x = e$ *(tout élément admet un symétrique)*

2. Quels sont les idéaux de $\mathbb{R}[X]$?
Les idéaux de $\mathbb{R}[X]$ sont exactement les idéaux monogènes.
En particulier, si I est un idéal, il existe un polynôme $P_0 \in \mathbb{R}[X]$ tel que $I = (P_0)$.

3. Calculer la signature de la permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

$\sigma = (1,3,4) \circ (5,6)$. *Donc* $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(1,2,3) \cdot \varepsilon(5,6) = (-1)^2 \cdot (-1)^1 = (-1)$

4. Donner une base et la dimension de l'ensemble $\mathcal{T}_n$ des matrices triangulaires supérieures de taille n, puis de l'ensemble $\mathcal{A}_n$ des matrices antisymétriques de taille n.
$\beta_{\mathcal{T}_n} = (E_{i,j})_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n}$. $dim(\mathcal{T}_n) = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
$\beta_{\mathcal{A}_n} = (E_{i,j} - E_{j,i})_{1 \leqslant i < j \leqslant n}$. $dim(\mathcal{A}_n) = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

5. Donner la définition du polynôme caractéristique d'une matrice carrée.
$\chi_A = det(XI_n - A)$

Jeudi

1. Citer le théorème de Lagrange pour les groupes.
Soit $(G, \cdot)$ un groupe fini dont le neutre est noté e_G. Alors $\forall x \in G, x^{Card(G)} = e_G$

2. Donner la définition de $\varphi(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ (indicatrice d'Euler).
$\varphi(n)$ désigne le nombre d'entiers $k \in [1, n-1]$ qui sont premiers avec n.
C'est aussi le nombre de classes inversibles dans l'anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$.
C'est aussi le nombre de générateurs du groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$.

3. Que valent les produits matriciels suivants : $E_{3,7}E_{6,7}$? $E_{3,7}E_{7,6}$? $E_{6,7}E_{7,3}$? Quelle est la formule générale de $E_{i,j}E_{k,l}$
De manière générale, $E_{i,j}E_{k,l} = \delta_j^k E_{i,l}$. Ainsi, $E_{3,7}E_{6,7} = 0$, $E_{3,7}E_{7,6} = E_{3,6}$ et $E_{6,7}E_{7,3} = E_{6,3}$.

4. Si $\chi_A = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ est le polynôme caractéristique de A, que valent a_0, a_{n-1} et a_n ?
$a_0 = (-1)^n det(A)$, $a_{n-1} = -Tr(A)$ *et* $a_n = 1$.

5. Qu'appelle-t-on un invariant de similitude ?
C'est une fonction constante sur chaque classe d'équivalence de la relation $A \sim B \Leftrightarrow \exists P \in GL_n(\mathbb{K}), A = P^{-1}BP$.

Vendredi

1. Donner la définition mathématique d'une valeur propre d'une matrice M ?
Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. $\lambda \in Sp(M) \Leftrightarrow \exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}, MX = \lambda X$.

2. Qu'appelle-t-on le sous espace propre associé ?
$E_\lambda = Ker(M - \lambda I_n) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) | MX = \lambda X\}$

3. Donner la définition du polynôme minimal d'une matrice M.
L'ensemble $I_M = \{P \in \mathbb{K}[X] | P(M) = 0\}$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$, donc il est monogène.
Lorsqu'il n'est pas réduit à $I_M = \{0_{\mathbb{K}[X]}\}$, on pose μ_M son générateur unitaire.

4. Justifier que toute matrice de $\mathcal{M}_{2k+1}(\mathbb{R})$ admet au moins une valeur propre réelle.
$deg(\chi_M)$ est impair. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, χ_M s'annule au moins une fois dans $\mathbb{R}$.
Donc M admet au moins une valeur propre réelle.

5. Citer au moins 5 invariants de similitude.
$det(M)$, $Tr(M)$, χ_M, μ_M, $\mathrm{Sp}(M)$.

6. Citer le théorème des restes chinois et donner un exemple d'application.
Si n et p sont premiers entre eux, l'application $\phi : \mathbb{Z}/np\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times Z/p\mathbb{Z}$ définie par $\phi(x \bmod np) = (x \bmod n, x \bmod p)$ est un isomorphisme d'anneaux.

Si $nu + pv = 1$, les solutions du système $\left\{ \begin{array}{l} x \equiv a[n] \\ x \equiv b[p] \end{array} \right.$ *sont les $x \equiv x_0[np]$ où $x_0 = nub + pva$.*