Exercice Semaine 3 pour le lundi 30 septembre 2019

Traiter au minimum les questions 1 et 2 de l'exercice 1

Exercice 1

Soient E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $N_k = \mathrm{Ker}(f^k)$ et $I_k = \mathrm{Im}(f^k)$ puis $N = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} N_k$ et $I = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} I_k$. ($N$ est le nilespace de f et I le cœur de f)

1. **a.** Montrer que les suites $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont respectivement croissante et décroissante pour l'inclusion.

b. Montrer que N et I sont stables par f.

c. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, $(N_k = N_{k+1}) \Rightarrow (N_{k+1} = N_{k+2})$.

2. On suppose de plus que $\dim E = n$ entier naturel non nul.

a. Soit $A = \{k \in \mathbb{N}/\ N_k = N_{k+1}\}$ et $B = \{k \in \mathbb{N}/\ I_k = I_{k+1}\}$. Montrer qu'il existe un entier $p \leqslant n$ tel que $A = B = \{k \in \mathbb{N}/\ k \geqslant p\}$.

b. Montrer que $E = N_p \oplus I_p$.

c. Montrer que $f_{/N}$ est nilpotent et que $f_{/I} \in GL(I)$.

3. Trouver des exemples où

a. A est vide et B est non vide,

b. A est non vide et B est vide,

c. A et B sont vides.

Exercice 2

Soient E un espace vectoriel non nul de dimension finie et f un endomorphisme de E.
Montrer que :

1. (f non injective) $\Leftrightarrow$ ($f = 0$ ou f diviseur de zéro à gauche).

2. (f non surjective) $\Leftrightarrow$ ($f = 0$ ou f diviseur de zéro à droite).

Corrections :

Exercice 2

1. $\Leftarrow/$ Si $f = 0$, f n'est pas injective (car $E \neq \{0\}$).
Si $f \neq 0$ et s'il existe un endomorphisme non nul g de E tel que $f \circ g = 0$ alors il existe un vecteur x de E tel que $g(x) \neq 0$ et $f(g(x)) = 0$. Par suite $\text{Ker}f \neq \{0\}$ et f n'est pas injective.
$\Rightarrow/$ Supposons f non injective et non nulle. Soient $F = \text{Ker}f$ et G un supplémentaire quelconque de F dans E. Soit p la projection sur F parallèlement à G.
Puisque $F = \text{Ker}f$, on a $f \circ p = 0$ et puisque f n'est pas nul, F est distinct de E et donc G n'est pas nul (E étant de dimension finie) ou encore p n'est pas nul. f est donc diviseur de zéro à gauche.

2. $\Leftarrow/$ Si $f = 0$, f n'est pas surjective.
Si f n'est pas nul et s'il existe un endomorphisme non nul g de E tel que $g \circ f = 0$ alors f ne peut être surjective car sinon $g(E) = g(f(E)) = \{0\}$ contredisant $g \neq 0$.
$\Rightarrow/$ Supposons f non surjective et non nulle.
Soient $G = \text{Im}f$ et F un supplémentaire quelconque de G dans E puis p la projection sur F parallèlement à G. F et G sont non nuls et distincts de E et donc p n'est pas nulle et vérifie $p \circ f = 0$. f est donc diviseur de zéro à droite.

Exercice 1

1. **a.** Soient $k \in \mathbb{N}$ et $x \in E$. $x \in N_k \Rightarrow f^k(x) = 0 \Rightarrow f(f^k(x)) = 0 \Rightarrow x \in N_{k+1}$.

$$\forall k \in \mathbb{N}, N_k \subset N_{k+1}.$$

Soient $k \in \mathbb{N}$ et $y \in I_{k+1} \Rightarrow \exists x \in E/\ y = f^{k+1}(x) \Rightarrow \exists x \in E/\ y = f^k(f(x)) \Rightarrow y \in I_k$.

$$\forall k \in \mathbb{N}, I_{k+1} \subset I_k.$$

b. Soit $x \in N$. Il existe un entier k tel que x est dans N_k ou encore tel que $f^k(x) = 0$. Mais alors $f^k(f(x)) = f(f^k(x)) = 0$ et $f(x)$ est dans N_k et donc dans N. Ainsi, N est stable par f.
Soit $y \in I$. Alors, pour tout naturel k, il existe $x_k \in E$ tel que $y = f^k(x_k)$. Mais alors, pour tout entier k, $f(y) = f(f^k(x_k)) = f^k(f(x))$ est dans I_k, et donc $f(y)$ est dans I. I est stable par f.

c. Si $N_k = N_{k+1}$, on a déjà $N_{k+1} \subset N_{k+2}$. Montrons que $N_{k+2} \subset N_{k+1}$.
Soit $x \in N_{k+2}$. Alors $f^{k+1}(f(x)) = 0$ et donc $f(x) \in N_{k+1} = N_k$. Donc, $f^k(f(x)) = 0$ ou encore x est dans N_{k+1}. On a montré que

$$\forall k \in \mathbb{N}, [(N_k = N_{k+1}) \Rightarrow (N_{k+1} = N_{k+2})]$$

2. **a.** Notons tout d'abord que, pour tout entier naturel k, $N_k \subset N_{k+1}$ et $I_{k+1} \subset I_k$. Si de plus, on est en dimension finie, alors d'après le théorème du rang,

$$N_k = N_{k+1} \Leftrightarrow I_{k+1} = I_k \Leftrightarrow \dim N_k = \dim N_{k+1}.$$

Donc $A = B$ (éventuellement $= \varnothing$).
La suite des noyaux itérés ne peut être strictement croissante pour l'inclusion car alors la suite des dimensions de ces noyaux serait une suite strictement croissante d'entiers naturels, vérifiant par une récurrence facile $\dim N_k \geqslant k$ pour tout naturel k, et en particulier $\dim N_{n+1} > \dim E$ ce qui est exclu.
Donc il existe un entier k tel que $N_k = N_{k+1}$. Soit p le plus petit de ces entiers k.
Par définition de p, N_k est strictement inclus dans N_{k+1} pour $k < p$, puis $N_p = N_{p+1}$ et d'après 1)c) pour tout entier naturel k supérieur ou égal à p on a $N_k = N_p$ (par récurrence sur $k \geqslant p$). Donc $A = \{p, p+1, p+2, ...\}$.
Enfin, $\dim(N_0) < \dim(N_1) < ... < \dim(N_p)$ et donc $\dim(N_p) \geqslant p$ ce qui impose $p \leqslant n$.

b. On a déjà $\dim N_p + \dim I_p = \dim E$. Il reste à vérifier que $I_p \cap N_p = \{0\}$.
Soit x un élément de $I_p \cap N_p$. Donc $f^p(x) = 0$ et il existe $y \in E$ tel que $x = f^p(y)$. Mais alors $f^{2p}(y) = 0$ et y est dans $N_{2p} = N_p$ (car $2p \geqslant p$) ou encore $x = f^p(y) = 0$.

$$E = I_p \oplus N_p.$$

c. Ici $N = N_p = \text{Ker} f^p$ et $I = I_p = \text{Im} f^p$.

Soit $f' = f_{/N}$. D'après 1)b), f' est un endomorphisme de N puis immédiatement $f'^p = 0$. Donc $f_{/N}$ est nilpotent.

Soit $f'' = f_{/I}$. f'' est d'après 1)b) un endomorphisme de I. Pour montrer que f'' est un automorphisme de I, il suffit de vérifier que $\text{Ker} f'' = \{0\}$. Mais $\text{Ker} f'' \subset \text{Ker} f \subset N$ et aussi $\text{Ker} f'' \subset I$. Donc $\text{Ker} f'' \subset N \cap I = \{0\}$. Donc $f_{/I} \in \mathcal{GL}(I)$.

3. Il faut bien sûr chercher les exemples en dimension infinie.

a. Soit f de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même qui à un polynôme P associe sa dérivée P'. On vérifie aisément que $\forall k \in \mathbb{N}$, $N_k = \mathbb{R}_k[X]$ et donc la suite des noyaux itérés est strictement croissante. La suite des I_k est par contre constante : $\forall k \in \mathbb{N}$, $I_k = \mathbb{R}[X]$. Dans ce cas, A est vide et $B = \mathbb{N}$.

b. A un polynôme P, on associe le polynôme XP. Les N_k sont tous nuls et pour $k \in \mathbb{N}$ donné, I_k est constitué des polynômes de valuation supérieure ou égale à k ou encore $I_k = X^k\mathbb{R}[X]$. Dans ce cas, $A = \mathbb{N}$ et $B = \varnothing$.

c. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ qui à Xn associe Xn+1 si n n'est pas une puissance de 2 et 0 si n est une puissance de 2 ($f(1) = X$, $f(X) = 0$, $f(X^2) = 0$, $f(X^3) = X^4$, $f(X^4) = 0$, ...)

Soit k un entier naturel.

$$f^{2^k-1}(X^{2^k+1}) = X^{2^k+1+2^k-1} = X^{2^{k+1}} \neq 0 \text{ et } f^{2^k}(X^{2^k+1}) = f(X^{2^{k+1}}) = 0.$$

Donc, pour tout entier naturel k, N_{2^k-1} est strictement inclus dans N_k. A est vide.

Ensuite, $X^{2^{k+1}} \in I_{2^k-1}$ mais $X^{2^{k+1}} \notin I_{2^k}$. En effet, si $l \geqslant 2^{k+1}+1$, $f^{2^k}(X^l)$ est ou bien nul ou bien de degré supérieur ou égal à $2^k+2^{k+1}+1 > 2^{k+1}$ et si $l \leqslant 2^{k+1}$, $f^{2^k}(X^l) = 0$ car entre l et 2^k+l-1, il y a une puissance de 2 (il y a 2^k nombres entre l et 2^k+l-1, ensuite $2^k+l-1 < 2^k+2^{k+1} = 3\times 2^k < 2^{k+2}$ et enfin l'écart entre deux puissances de 2 inférieures à 2^{k+1} vaut au maximum $2^{k+1} - 2^k = 2^k$) . Donc, I_{2^k} contient le polynôme nul ou des polynômes de degré strictement supérieur à 2^{k+1} et ne contient donc pas $X^{2^{k+1}}$. Finalement, pour tout entier naturel k, I_{2^k} est strictement inclus dans I_{2^k-1} et B est vide.

4. Pour k entier naturel donné, on note f_k la restriction de f à I_k. D'après le théorème du rang, on a

$$\text{dim} I_k = \text{dimKer} f_k + \text{dimIm} f_k \text{ avec } \text{Im} f_k = f(I_k) = I_{k+1}.$$

Donc, pour tout entier naturel k, $d_k - d_{k+1} = \text{dimKer} f_k$.

Or, pour tout entier naturel k, $\text{Ker} f_{k+1} = \text{Ker} f \cap I_{k+1} \subset \text{Ker} f \cap I_k = \text{Ker} f_k$ et donc $d_{k+1} - d_{k+2} = \text{dimKer} f_{k+1} \leqslant \text{dimKer} f_k = d_k - d_{k+1}$.

Finalement, pour tout entier naturel k, $d_{k+1} - d_{k+2} \leqslant d_k - d_{k+1}$ et la suite des images itérées décroît de moins en moins vite.