Exercice Semaine 3 pour le lundi 30 septembre 2019

Traiter au minimum les questions 1 et 2 de l'exercice 1

Exercice 1

Soient E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $N_k = \mathrm{Ker}(f^k)$ et $I_k = \mathrm{Im}(f^k)$ puis $N = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} N_k$ et $I = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} I_k$. ($N$ est le nilespace de f et I le cœur de f)

1. **a.** Montrer que les suites $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont respectivement croissante et décroissante pour l'inclusion.

b. Montrer que N et I sont stables par f.

c. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, $(N_k = N_{k+1}) \Rightarrow (N_{k+1} = N_{k+2})$.

2. On suppose de plus que $\dim E = n$ entier naturel non nul.

a. Soit $A = \{k \in \mathbb{N} / \ N_k = N_{k+1}\}$ et $B = \{k \in \mathbb{N} / \ I_k = I_{k+1}\}$. Montrer qu'il existe un entier $p \leqslant n$ tel que $A = B = \{k \in \mathbb{N} / \ k \geqslant p\}$.

b. Montrer que $E = N_p \oplus I_p$.

c. Montrer que $f_{/N}$ est nilpotent et que $f_{/I} \in GL(I)$.

3. Trouver des exemples où

a. A est vide et B est non vide,

b. A est non vide et B est vide,

c. A et B sont vides.

Exercice 2

Soient E un espace vectoriel non nul de dimension finie et f un endomorphisme de E.
Montrer que :

1. (f non injective) $\Leftrightarrow$ ($f = 0$ ou f diviseur de zéro à gauche).

2. (f non surjective) $\Leftrightarrow$ ($f = 0$ ou f diviseur de zéro à droite).