Obligatoire : rédiger l'exercice MPSI et au moins la partie A du problème.

Exercice MPSI :

Soit φ qui à P élément de $\mathbb{R}_{2n}[X]$ associe $\varphi(P) = (X^2-1)P' - 2nXP$.

Vérifier que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_{2n}[X]$ puis déterminer les valeurs et vecteurs propres de φ.

Pour cela, on cherchera les fonctions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $y' - \dfrac{2nx}{x^2-1}y = 0$ en faisant la décomposition en éléments simples de $\dfrac{2nX}{X^2-1}$.

Problème :

Dans ce problème, on désigne par $\bar{z}$ le conjugué du nombre complexe z.

Pour $(a,b) \in \mathbb{C}^2$, on désigne par $M(a,b)$ la matrice carrée complexe $M(a,b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Une matrice de la forme $M(a,b)$ sera appelée *quaternion*. On considèrera en particulier les quaternions $e = I_2 = M(1,0)$, $I = M(0,1)$, $J = M(\mathrm{i},0)$, $K = M(0,\mathrm{i})$ et on notera $\mathbb{H} = \{M(a,b) \mid (a,b) \in \mathbb{C}^2\}$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ constitué par tous les quaternions.

On veillera à ne pas confondre la matrice $I = M(0,1)$ et la matrice unité $I_2 = e = M(1,0)$.

A Le « corps » des quaternions

On munit l'ensemble $\mathcal{C} = \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ des matrices complexes à deux lignes et deux colonnes de l'addition $+$, de la multiplication $\times$ usuelles et de la multiplication par **un réel** notée $\cdot$ et définie usuellement par

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} \in \mathcal{C}, \quad \lambda \cdot M = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda a \end{pmatrix}$$

On rappelle que $(\mathcal{C}, +, \times, \cdot)$ est une algèbre sur le corps $\mathbb{R}$ **des réels**.

A.1 (a) Donner, sans justification, une base et la dimension de $\mathcal{C}$ sur le corps **des réels** $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que $\mathbb{H}$ est un sous-espace vectoriel **réel** de $\mathcal{C}$ et que $\{e, I, J, K\}$ en est une base sur le corps $\mathbb{R}$.

(c) Montrer que $\mathbb{H}$ est stable par multiplication.

A.2 Montrer que $(\mathbb{H} \setminus \{0\}, \times)$ est un sous-groupe non commutatif du groupe linéaire $(\mathcal{GL}_2(\mathbb{C}), \times)$.

$(\mathbb{H}, +, \times)$ a toutes les propriétés d'un corps sauf la commutativité de $\times$: on dit que c'est un *anneau à divisions* (ou, parfois, un *corps non commutatif*).

A.3 Calculer les produits deux à deux des matrices e, I, J, K. On présentera les résultats dans une table à double entrée.

B Conjugaison et normes

Ainsi tout élément $q \in \mathbb{H}$ s'écrit de manière unique $q = xe + yI + zJ + tK$ avec $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$.

Pour $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ et $q = xe + yI + zJ + tK \in \mathbb{H}$ on pose $q^* = xe - yI - zJ - tK \in \mathbb{H}$ et $N(q) = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \in \mathbb{R}_+$.

B.1 (a) Vérifier que, pour tout $q \in \mathbb{H}$, q^* est la transposée de la matrice dont les coefficients sont les conjugués des coefficients de q.

(b) En déduire que, pour tout $(q,r) \in \mathbb{H}^2$, $(qr)^* = r^*q^*$.

(c) Montrer que $q^{**} = q$ pour tout $q \in \mathbb{H}$ et que $q \mapsto q^*$ est un automorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{H}$.

(d) Pour $q \in \mathbb{H}$, exprimer qq^* à l'aide de $N(q)$. En déduire que la fonction N est un morphisme de groupes de $(\mathbb{H}^*, \times)$ dans $(\mathbb{R}_+^*, \times)$.

B.2 (a) Soient $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ et $q = xe + yI + zJ + tK$. Exprimer la trace de la matrice $q \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ en fonction du réel x.

(b) En déduire que, pour tout $(q,r) \in \mathbb{H}^2$, $qr - rq = q^*r^* - r^*q^*$.

(c) Soient a, b, c, d des quaternions. Établir la relation $(acb^*)d + d^*(acb^*)^* = (acb^*)^*d^* + d(acb^*)$.

En déduire l'identité $(N(a) + N(b))(N(c) + N(d)) = N(ac - d^*b) + N(bc^* + da)$.

CORRECTIONS :
Exercice MPSI :
On vérifie que φ est linéaire car $\varphi(\lambda P+Q) = ... = \lambda\varphi(P)+\varphi(Q)$ notamment par linéarité de la dérivation des polynômes.
Si $deg(P) \leqslant (2n-1)$, alors $deg(P') \leqslant 2n-2$ et par conséquent, $deg(\varphi(P)) \leqslant 2n$ par opérations sur les degrés.
Il reste à étudier le cas du polynôme X^{2n}.
$\varphi(X^{2n}) = (X^2-1)\cdot(2nX^{2n-1}) - 2nX\cdot X^{2n} = -2nX^{2n-1} \in \mathbb{R}_{2n}[X]$.
Finalement, par linéarité et en combinant les deux résultats précédents, φ est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_{2n}[X]$ et est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}_{2n}[X]$.
L'équation différentielle $y' - \dfrac{2nx}{x^2-1}y = 0$ est linéaire d'ordre 1 et normalisée. D'après le théorème de Cauchy pour une EDLO1, l'espace des solutions est une droite vectorielle engendrée par $y : x \mapsto \exp\int_0^x \dfrac{2nt}{t^2-1} = \exp n\int_0^x \dfrac{2t}{t^2-1} = \exp n\ln(x^2-1) = (x^2-1)^n$.
Soit alors P vecteur propre de φ. Alors $P \neq 0$ et il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $(X^2-1)P' - 2nXP = \lambda P$, c'est à dire dans le corps des fractions rationnelles $P' - \dfrac{2nX+\lambda}{X^2-1}P = P' - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2n+\lambda}{X-1} - \dfrac{-2n+\lambda}{X+1}\right)P$.
La fonction polynomiale P est donc solution de l'équation différentielle $y' - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2n+\lambda}{x-1} - \dfrac{-2n+\lambda}{x+1}\right)y = 0$ qui se résout comme la précédente pour trouver la solution $y(x) = (x-1)^{n+\lambda/2}(x+1)^{n-\lambda/2}$.
Cette fonction est un polynôme ssi $\lambda/2$ est entier et si $0 \leqslant \lambda \leqslant 2n$.
Donc les valeurs propres sont exactement les entiers pairs entre $-2n$ et $2n$ et pour tout $2k \in [-2n, 2n]$, le polynôme $P_k = (X-1)^{n+k}(X-1)^{n-k}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $2n-2k$.
Pour les 5/2 : il y a $2n+1$ valeurs propres pour un endomorphisme de $\mathbb{R}_{2n}[X]$ qui est de dimension $2n+1$ donc φ est diagonalisable.

Problème

II.A Le « corps » des quaternions

II.A.1 (a) La dimension de $\mathcal{C}$ sur $\mathbb{R}$ vaut $4\times 2 = 8$ et que

$$(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2}, \mathrm{i}E_{1,1}, \mathrm{i}E_{1,2}, \mathrm{i}E_{2,1}, \mathrm{i}E_{2,2})$$

en est une base ($E_{i,j}$ est la matrice élémentaire dont le terme en position (i,j) vaut 1 et les autres zéro).

(b) Si l'on écrit $a = \alpha + \mathrm{i}\beta$ et $b = \gamma + \mathrm{i}\delta$ avec $(\alpha,\beta,\gamma,\delta) \in \mathbb{R}^4$, on a

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} \alpha+\mathrm{i}\beta & -\gamma-\mathrm{i}\delta \\ \gamma-\mathrm{i}\delta & \alpha-\mathrm{i}\beta \end{pmatrix} = \alpha e + \beta J + \gamma I + \delta K.$$

Ceci prouve que $\mathbb{H} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(e,I,J,K)$, et en particulier que c'est un sous-espace vectoriel réel de $\mathcal{C}$. Par ailleurs, il est aisé de vérifier que la famille (e,I,J,K) est libre, donc que c'est une base de $\mathbb{H}$.

(c) Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{C}^4$. On calcule le produit

$$\begin{aligned} M(a,b)M(c,d) = \begin{pmatrix} a & -b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & -d \\ \bar{d} & \bar{c} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} ac-b\bar{d} & -ad-b\bar{c} \\ \bar{b}c+\bar{a}\bar{d} & -\bar{b}d+\bar{a}\bar{c} \end{pmatrix}, \\ &= M(ac-b\bar{d}, ad+b\bar{c}). \end{aligned}$$

Le résultat appartient à $\mathbb{H}$, donc $\mathbb{H}$ est stable par multiplication.

II.A.2 Tout d'abord, $\det M(a,b) = a\bar{a} + b\bar{b} = |a|^2 + |b|^2$ est nul si et seulement si $a = b = 0$, c'est-à-dire dans le cas où $M(a,b)$ est la matrice nulle. Ceci prouve que

$$(\mathbb{H} \setminus \{0\}) \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}).$$

La partie $\mathbb{H}$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ est non vide (elle contient $e = I_2$), stable par produit d'après la question II.A.1.c, et stable par inverse car on vérifie facilement grâce à la même question que

$$\forall (a,b) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}, \quad [M(a,b)]^{-1} = M\left(\frac{\bar{a}}{|a|^2+|b|^2}, -\frac{b}{|a|^2+|b|^2}\right).$$

C'est donc un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$. Il n'est pas commutatif car $K = IJ \neq JI = -K$.

II.A.3 (a) On ne détaille pas les calculs. Voici la table, où l'on place le produit AB à l'intersection de la ligne A et de la colonne B :

$\times$	e	I	J	K
e	e	I	J	K
I	I	$-e$	K	$-J$
J	J	$-K$	$-e$	I
K	K	J	$-I$	$-e$

II.B Conjugaison et normes

II.B.1 (a) Avec les notations de l'énoncé, si l'on pose $a = x + \mathrm{i}z$ et $b = y - \mathrm{i}t$,

$$q = xe + yI + zJ + tK = \begin{pmatrix} x + \mathrm{i}z & -y + \mathrm{i}t \\ y + \mathrm{i}t & x - \mathrm{i}z \end{pmatrix} = M(a, b),$$

$$q^* = xe - yI - zJ - tK = \begin{pmatrix} x - \mathrm{i}z & y - \mathrm{i}t \\ -y - \mathrm{i}t & x + \mathrm{i}z \end{pmatrix} = {}^t\overline{M(a, b)}.$$

On obtient bien le résultat attendu, en notant $\overline{A}$ la matrice dont les éléments sont les conjugués de ceux de A (on utilisera librement cette notation dans la suite du problème).

(b) On vérifie aisément que $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$ pour toutes matrices complexes multipliables (cela résulte de ce que la conjugaison dans $\mathbb{C}$ est un morphisme pour l'addition et la multiplication dans $\mathbb{C}$). Par ailleurs, le cours affirme que la transposition est un antimorphisme multiplicatif, c'est-à-dire que ${}^t(A \times B) = {}^tB \times {}^tA$ toutes matrices complexes multipliables. Il en résulte que

$$\forall (q, r) \in \mathbb{H}^2, \quad (qr)^* = {}^t(\overline{qr}) = {}^t(\overline{q}\,\overline{r}) = {}^t\overline{r}\,{}^t\overline{q} = r^* q^*.$$

(c) Le résultat vient de ce que la conjugaison dans $\mathbb{C}$ et la transposition sont deux involutions, et aussi du fait qu'elles commutent, c'est-à-dire de l'égalité $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, ${}^t\,\overline{A} = \overline{{}^tA}$. Alors

$$\forall q \in \mathbb{H}, \quad q^{**} = {}^t\left(\overline{{}^t\overline{q}}\right) = {}^t\left({}^t\overline{\overline{q}}\right) = {}^t\left({}^tq\right) = q.$$

Ensuite, la $\mathbb{R}$–linéarité de $q \mapsto q^*$ est évidente, et le fait que $q^{**} = q$ montre que $q \mapsto q^*$ est une involution de $\mathbb{H}$, donc une bijection de $\mathbb{H}$: c'est donc un automorphisme du $\mathbb{R}$–espace vectoriel $\mathbb{H}$.

Remarques. — C'est même un automorphisme involutif de $\mathbb{H}$, c'est-à-dire une symétrie vectorielle de $\mathbb{H}$, par rapport à la droite $\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(e)$ et parallèlement à l'hyperplan $\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(I, J, K)$. L'application $q \mapsto q^*$ est appelée la conjugaison dans $\mathbb{H}$, et q^* est appelé le conjugué du quaternion q. Cette analogie entre complexes et quaternions est mise à profit à la question II.B.2.b.

(d) Soient $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, $(a, b) = (x + \mathrm{i}z, y - \mathrm{i}t) \in \mathbb{C}^2$, et $q = M(a, b)$. Alors la question II.A.1.c montre que

$$qq^* = M(a, b)\,{}^tM(\bar{a}, \bar{b}) = M(a\bar{a} + b\bar{b}, -a\bar{\bar{b}} + b\bar{\bar{a}}) = M(|a|^2 + |b|^2, 0) = N(q)e.$$

On peut aussi mener un calcul à partir de la table et du H-système de la question II.A.3 :

$$\begin{aligned} qq^* &= (xe + yI + zJ + tK)(xe - yI - zJ - tK), \\ &= x^2e - xyI - xzJ - xtK + yxI - y^2I^2 - yzIJ - ytIK \\ &\qquad + zxJ - zyJI - z^2J^2 - ztJK + txK - tyKI - tzKJ - t^2K^2, \\ &= (x^2 + y^2 + z^2 + t^2)e - yz(IJ + JI) - yt(IK + KI) - zt(JK + KJ), \\ &= N(q)e. \end{aligned}$$

On calcule ensuite $(qr)(qr)^*$ de deux manières : d'une part, la relation ci-dessus montre que ce produit vaut $N(qr)e$. D'autre part, la question II.B.1.b donne

$$\begin{aligned} (qr)(r^*q^*) &= q(rr^*)q^* = q(N(r)e)q^* = N(r)qq^* = N(r)N(q)e, \\ &= N(q)N(r)e. \end{aligned}$$

Comme $N(qr)$ et $N(q)N(r)$ sont des nombres et que e est un vecteur non nul d'un espace vectoriel, l'égalité $N(qr)e = N(q)N(r)e$ entraîne l'égalité

$$\forall (q, r) \in \mathbb{H}^2, \quad N(qr) = N(q)N(r).$$

II.B.2 (a) Par linéarité de la trace, on obtient

$$\mathrm{tr}(q) = \mathrm{tr}(xe + yI + zJ + tK) = 2x.$$

(b) On appelle *quaternion réel* (respectivement *quaternion pur*) un quaternion de la forme xe avec x réel (respectivement $yI + zJ + tK$ avec y, z, t réels), et on note $\mathbf{R}$ et $\mathbf{P}$ les sous-ensembles formés des quaternions réels et des quaternions purs respectivement.

Il est clair que $\mathbf{R}$ et $\mathbf{P}$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{H}$, donc que l'égalité de deux quaternions équivaut à l'égalité de leurs parties réelles et de leurs parties pures (appellations évidentes). D'après la question précédente et la définition du conjugué, la partie réelle et la partie pure de $q \in \mathbb{H}$ sont données par

$$\mathrm{Re}(q) = \frac{\mathrm{tr}(q)}{2} e = \frac{q + q^*}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{Pur}(q) = \frac{q - q^*}{2}.$$

Comme la trace vérifie $\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$, $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$, les traces de $u := qr - rq$ et de $v := q^*r^* - r^*q^*$ sont nulles, donc ces deux quaternions ont la même partie réelle. Enfin, comme $v = -u^*$, on a

$$\mathrm{Pur}(v) = \frac{v - v^*}{2} = \frac{-u^* + u^{**}}{2} = \frac{u - u^*}{2} = \mathrm{Pur}(u).$$

Les quaternions u et v sont donc égaux.

(c) On applique la question précédente à $q = acb^*$ et $r = d$, en écrivant l'égalité sous la forme $qr + r^*q^* = q^*r^* + rq$. On obtient le résultat attendu :

$$(acb^*)d + d^*(acb^*)^* = (acb^*)^*d^* + d(acb^*).$$

On utilise ensuite la relation $\forall q \in \mathbb{H}$, $qq^* = N(q)e$ et son corollaire $\forall (q, r) \in \mathbb{H}^2$, $qrr^*q = qq^*rr^*$, et on l'applique au membre de droite de l'inégalité à démontrer (les termes soulignés se simplifient en vertu de la relation ci-dessus) :

$$\begin{aligned}
&[N(ac - d^*b) + N(bc^* + da)]e \\
&\quad = (ac - d^*b)(ac - d^*b)^* + (bc^* + da)(bc^* + da)^*, \\
&\quad = (ac - d^*b)(c^*a^* - b^*d) + (bc^* + da)(cb^* + a^*d^*), \\
&\quad = aa^*cc^* \underline{-(acb^*)d - d^*(acb^*)^*} + bb^*dd^* \\
&\qquad\qquad + bb^*cc^* \underline{+(acb^*)^*d^* + d(acb^*)} + aa^*dd^*, \\
&\quad = aa^*cc^* + bb^*dd^* + bb^*cc^* + aa^*dd^*, \\
&\quad = (aa^* + bb^*)(cc^* + dd^*) = \big[\big(N(a) + N(b)\big)\big(N(c) + N(d)\big)\big]\, e.
\end{aligned}$$

On en déduit que pour tous les quaternions a, b, c et d :

$$(N(a) + N(b))(N(c) + N(d)) = N(ac - d^*b) + N(bc^* + da).$$