Obligatoire : rédiger l'exercice MPSI et au moins la partie A du problème.

Exercice MPSI :

Soit φ qui à P élément de $\mathbb{R}_{2n}[X]$ associe $\varphi(P) = (X^2-1)P' - 2nXP$.

Vérifier que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_{2n}[X]$ puis déterminer les valeurs et vecteurs propres de φ.

Pour cela, on cherchera les fonctions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $y' - \dfrac{2nx}{x^2-1}y = 0$ en faisant la décomposition en éléments simples de $\dfrac{2nX}{X^2-1}$.

Problème :

Dans ce problème, on désigne par $\bar{z}$ le conjugué du nombre complexe z.

Pour $(a,b) \in \mathbb{C}^2$, on désigne par $M(a,b)$ la matrice carrée complexe $M(a,b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Une matrice de la forme $M(a,b)$ sera appelée *quaternion*. On considèrera en particulier les quaternions $e = I_2 = M(1,0)$, $I = M(0,1)$, $J = M(\mathrm{i},0)$, $K = M(0,\mathrm{i})$ et on notera $\mathbb{H} = \{M(a,b) \,|\, (a,b) \in \mathbb{C}^2\}$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ constitué par tous les quaternions.

On veillera à ne pas confondre la matrice $I = M(0,1)$ et la matrice unité $I_2 = e = M(1,0)$.

A Le « corps » des quaternions

On munit l'ensemble $\mathcal{C} = \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ des matrices complexes à deux lignes et deux colonnes de l'addition $+$, de la multiplication $\times$ usuelles et de la multiplication par **un réel** notée $\cdot$ et définie usuellement par

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} \in \mathcal{C}, \quad \lambda \cdot M = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda a \end{pmatrix}$$

On rappelle que $(\mathcal{C}, +, \times, \cdot)$ est une algèbre sur le corps $\mathbb{R}$ **des réels**.

A.1 (a) Donner, sans justification, une base et la dimension de $\mathcal{C}$ sur le corps **des réels** $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que $\mathbb{H}$ est un sous-espace vectoriel **réel** de $\mathcal{C}$ et que $\{e, I, J, K\}$ en est une base sur le corps $\mathbb{R}$.

(c) Montrer que $\mathbb{H}$ est stable par multiplication.

A.2 Montrer que $(\mathbb{H} \setminus \{0\}, \times)$ est un sous-groupe non commutatif du groupe linéaire $(\mathcal{GL}_2(\mathbb{C}), \times)$.

$(\mathbb{H}, +, \times)$ a toutes les propriétés d'un corps sauf la commutativité de $\times$: on dit que c'est un *anneau à divisions* (ou, parfois, un *corps non commutatif*).

A.3 Calculer les produits deux à deux des matrices e, I, J, K. On présentera les résultats dans une table à double entrée.

B Conjugaison et normes

Ainsi tout élément $q \in \mathbb{H}$ s'écrit de manière unique $q = xe + yI + zJ + tK$ avec $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$.

Pour $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ et $q = xe + yI + zJ + tK \in \mathbb{H}$ on pose $q^* = xe - yI - zJ - tK \in \mathbb{H}$ et $N(q) = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \in \mathbb{R}_+$.

B.1 (a) Vérifier que, pour tout $q \in \mathbb{H}$, q^* est la transposée de la matrice dont les coefficients sont les conjugués des coefficients de q.

(b) En déduire que, pour tout $(q,r) \in \mathbb{H}^2$, $(qr)^* = r^*q^*$.

(c) Montrer que $q^{**} = q$ pour tout $q \in \mathbb{H}$ et que $q \mapsto q^*$ est un automorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{H}$.

(d) Pour $q \in \mathbb{H}$, exprimer qq^* à l'aide de $N(q)$. En déduire que la fonction N est un morphisme de groupes de $(\mathbb{H}^*, \times)$ dans $(\mathbb{R}_+^*, \times)$.

B.2 (a) Soient $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ et $q = xe + yI + zJ + tK$. Exprimer la trace de la matrice $q \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ en fonction du réel x.

(b) En déduire que, pour tout $(q,r) \in \mathbb{H}^2$, $qr - rq = q^*r^* - r^*q^*$.

(c) Soient a,b,c,d des quaternions. Établir la relation $(acb^*)d + d^*(acb^*)^* = (acb^*)^*d^* + d(acb^*)$.

En déduire l'identité $(N(a)+N(b))(N(c)+N(d)) = N(ac - d^*b) + N(bc^* + da)$.

Exercices en temps libre : Semaine 2

Obligatoire : rédiger l'exercice MPSI et au moins la partie A du problème.

Exercice MPSI :

Soit φ qui à P élément de $\mathbb{R}_{2n}[X]$ associe $\varphi(P) = (X^2-1)P' - 2nXP$.

Vérifier que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_{2n}[X]$ puis déterminer les valeurs et vecteurs propres de φ.

Pour cela, on cherchera les fonctions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $y' - \dfrac{2nx}{x^2-1}y = 0$ en faisant la décomposition en éléments simples de $\dfrac{2nX}{X^2-1}$.

Problème :

Dans ce problème, on désigne par $\bar{z}$ le conjugué du nombre complexe z.

Pour $(a,b) \in \mathbb{C}^2$, on désigne par $M(a,b)$ la matrice carrée complexe $M(a,b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Une matrice de la forme $M(a,b)$ sera appelée *quaternion*. On considèrera en particulier les quaternions $e = I_2 = M(1,0)$, $I = M(0,1)$, $J = M(\mathrm{i},0)$, $K = M(0,\mathrm{i})$ et on notera $\mathbb{H} = \{M(a,b) \,|\, (a,b) \in \mathbb{C}^2\}$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ constitué par tous les quaternions.

On veillera à ne pas confondre la matrice $I = M(0,1)$ et la matrice unité $I_2 = e = M(1,0)$.

A Le « corps » des quaternions

On munit l'ensemble $\mathcal{C} = \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ des matrices complexes à deux lignes et deux colonnes de l'addition $+$, de la multiplication $\times$ usuelles et de la multiplication par **un réel** notée $\cdot$ et définie usuellement par

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} \in \mathcal{C}, \quad \lambda \cdot M = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda a \end{pmatrix}$$

On rappelle que $(\mathcal{C}, +, \times, \cdot)$ est une algèbre sur le corps $\mathbb{R}$ **des réels**.

A.1 (a) Donner, sans justification, une base et la dimension de $\mathcal{C}$ sur le corps **des réels** $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que $\mathbb{H}$ est un sous-espace vectoriel **réel** de $\mathcal{C}$ et que $\{e, I, J, K\}$ en est une base sur le corps $\mathbb{R}$.

(c) Montrer que $\mathbb{H}$ est stable par multiplication.

A.2 Montrer que $(\mathbb{H} \setminus \{0\}, \times)$ est un sous-groupe non commutatif du groupe linéaire $(\mathcal{GL}_2(\mathbb{C}), \times)$.

$(\mathbb{H}, +, \times)$ a toutes les propriétés d'un corps sauf la commutativité de $\times$: on dit que c'est un *anneau à divisions* (ou, parfois, un *corps non commutatif*).

A.3 Calculer les produits deux à deux des matrices e, I, J, K. On présentera les résultats dans une table à double entrée.

B Conjugaison et normes

Ainsi tout élément $q \in \mathbb{H}$ s'écrit de manière unique $q = xe + yI + zJ + tK$ avec $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$.

Pour $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ et $q = xe + yI + zJ + tK \in \mathbb{H}$ on pose $q^* = xe - yI - zJ - tK \in \mathbb{H}$ et $N(q) = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \in \mathbb{R}_+$.

B.1 (a) Vérifier que, pour tout $q \in \mathbb{H}$, q^* est la transposée de la matrice dont les coefficients sont les conjugués des coefficients de q.

(b) En déduire que, pour tout $(q,r) \in \mathbb{H}^2$, $(qr)^* = r^*q^*$.

(c) Montrer que $q^{**} = q$ pour tout $q \in \mathbb{H}$ et que $q \mapsto q^*$ est un automorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{H}$.

(d) Pour $q \in \mathbb{H}$, exprimer qq^* à l'aide de $N(q)$. En déduire que la fonction N est un morphisme de groupes de $(\mathbb{H}^*, \times)$ dans $(\mathbb{R}_+^*, \times)$.

B.2 (a) Soient $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ et $q = xe + yI + zJ + tK$. Exprimer la trace de la matrice $q \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ en fonction du réel x.

(b) En déduire que, pour tout $(q,r) \in \mathbb{H}^2$, $qr - rq = q^*r^* - r^*q^*$.

(c) Soient a,b,c,d des quaternions. Établir la relation $(acb^*)d + d^*(acb^*)^* = (acb^*)^*d^* + d(acb^*)$.

En déduire l'identité $(N(a)+N(b))(N(c)+N(d)) = N(ac - d^*b) + N(bc^* + da)$.

1