Semaine 22 :

Vendredi :

Question 1 : pour chaque équation différentielle suivante, détailler si c'est une équation différentielle linéaire, non linéaire, scalaire, vectorielle, résolue, non résolue, du premier ordre, du second ordre, homogène, avec second membre.
Dans quel(s) cas peut-on appliquer le théorème de Cauchy Lipschitz ?
Préciser alors de quel type est l'espace des solution et sa dimension éventuelle.

1. $(t^2 - t)y'' + \sin(t)y' - y = \tan(t)$ sur $]-\pi/2, \pi/2[$.
2. $y" - yy' = 0$ sur $\mathbb{R}$.
3. $(t^2 - 1)y' + y'' = 0$ sur $\mathbb{R}$.
4. $y' - ty = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(t) \end{pmatrix}$

Question 2 : déterminer pour chaque équation suivante, l'espace des solutions **réelles** :

1. $y'' + y = 0$
2. $y' - \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}y = 0$
3. $y''' - y'' + y' - y = 0$

Question 3 : Résoudre $y'' + y = 2\cos x$ sur $\mathbb{R}$

N'oubliez pas de nous faire un bilan de votre semaine en mathématiques et en physique.

La période est délicate, mais il ne faut pas se relâcher et rester MOTIVÉ !
Vous devez autant que possible essayer de **respecter l'emploi du temps habituel** de la classe encore jusqu'aux vacances d'avril.

Ensuite, nous vous indiquerons comment nous continuerons à vous encadrer et suivre votre travail jusqu'à la reprise des cours et jusqu'aux concours.

Donnez nous de vos nouvelles et n'hésitez pas à nous faire part de votre avancée, votre rythme de travail et vos éventuelles difficultés !
Nous ne sommes pas là pour vous juger si vous avez du retard ou si vous n'arrivez pas à travailler, mais pour vous accompagner et vous soutenir jusqu'aux concours !

Réponses à la page suivante.

Question 1 :

1. $(t^2-t)y''+\sin(t)y'-y=\tan(t)$ est une équation linéaire scalaire du second ordre non résolue non homogène. On ne peut pas appliquer Cauchy Lipschitz.
   L'espace de solution est un espace affine, mais on ne peut pas prévoir sa dimension (C.L. ne s'applique pas).
2. $y"-yy'=0$ est une équation non linéaire scalaire du second ordre résolue homogène. On peut appliquer le th. de Cauchy Lipschitz.
   L'espace de solution n'est pas un espace vectoriel (l'équation n'est pas linéaire)
3. $(t^2-1)y'+y''=0$ est une équation linéaire scalaire du second ordre résolue homogène. On peut appliquer le th. de Cauchy Lipschitz.
   L'espace de solution est un espace vectoriel de dimension 2 (ordre de l'équation scalaire).
4. $y'-ty=\begin{pmatrix}0\\ \cos(t)\end{pmatrix}$ est une équation linéaire vectorielle du premier ordre résolue non homogène. On peut appliquer le th. de Cauchy Lipschitz.
   L'espace de solution est un espace affine de dimension 2 (équation vectorielle sur $\mathbb{R}^2$)

Question 2 :

1. $y''+y=0$
   L'équation caractéristique est $P(r)=r^2+1=0$ dont i et $-i$ sont racines. Par le théorème de structure (qui découle du lemme des noyaux), si δ est l'opérateur de dérivation, l'ensemble S des solutions de (E) est $S=\mathrm{Ker}(P(f))=\mathrm{Ker}(\delta+iId)\oplus\mathrm{Ker}(\delta-iId)$
   $S_{\mathbb{C}}=Vect(t\mapsto e^{it})\oplus Vect(t\mapsto e^{-it})$
   et $S_{\mathbb{R}}=\{y : y\mapsto \lambda\cos t+\mu\sin t|(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\}$
2. $y'-\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}y=0$
   $S=Vect(e^{argsh\ (x)})=Vect(e^{\ln(x+\sqrt{x^2+1}})=Vect(x\mapsto x+\sqrt{x^2+1})$
3. $y'''-y''+y'-y=0$
   L'équation caractéristique est $P(r)=r^3-r^2+r-1=0$ dont 1 est racine. Donc $r^3-r^2+r-1=(r-1)(r^2+1)=(r-1)(r-i)(r+i)$. Par le lemme des noyaux, si δ est l'opérateur de dérivation, l'ensemble S des solutions de (E) est $S=\mathrm{Ker}(P(f))=\mathrm{Ker}(\delta-Id)\oplus\mathrm{Ker}(\delta+iId)\oplus\mathrm{Ker}(\delta-iId)$ *par le lemme des noyaux.*
   $S_{\mathbb{C}}=Vect(t\mapsto e^{t})\oplus Vect(t\mapsto e^{it})\oplus Vect(t\mapsto e^{-it})$
   et $S_{\mathbb{R}}=\{y : y\mapsto Ae^t+B\cos t+C\sin t|(A,B,C)\in\mathbb{R}^3\}$

Question 3 :

L'espace de solutions homogène est $Vect(t\mapsto\cos t, t\mapsto\sin t)$. On cherche λ et μ deux fonctions telles que
$\lambda'(t)\cos(t)+\mu'(t)\sin(t)=0$
$\lambda'(t)(-\sin(t))+\mu'(t)\cos(t)=2\cos(t)$
On trouve $\lambda'(t)=-2\sin(t)\cos(t)$ et $\mu'(t)=2\cos^2(t)$
et $\lambda(t)=\dfrac{\cos(2t)}{2}+c$ et $\mu(t)=t+\dfrac{\sin(2t)}{2}+c'$ conviennent.
$S=\{y\mapsto A\cos t+B\sin t+t\sin t|(A,B)\in\mathbb{R}^2\}$

N'oubliez pas de nous faire un bilan de votre semaine en mathématiques et en physique.

La période est délicate, mais il ne faut pas se relâcher et rester MOTIVÉ !
Vous devez autant que possible essayer de **respecter l'emploi du temps habituel** de la classe encore jusqu'aux vacances d'avril.

Ensuite, nous vous indiquerons comment nous continuerons à vous encadrer et suivre votre travail jusqu'à la reprise des cours et jusqu'aux concours.

Donnez nous de vos nouvelles et n'hésitez pas à nous faire part de votre avancée,

votre rythme de travail et vos éventuelles difficultés !
Nous ne sommes pas là pour vous juger si vous avez du retard ou si vous n'arrivez pas à travailler, mais pour vous accompagner et vous soutenir jusqu'aux concours !