Exercices en temps libre : Semaine 1

Rédiger au moins un des 2 exercices.

Exercice 1 :

Une bande de 17 pirates dispose d'un butin composé de N pièces d'or d'égale valeur. Ils décident de se le partager également et de donner le reste au cuisinier (non pirate). Celui ci reçoit 3 pièces. Mais une rixe éclate et 6 pirates sont tués. Tout le butin est reconstitué et partagé entre les survivants comme précédemment ; le cuisinier reçoit alors 4 pièces. Dans un naufrage ultérieur, seuls 6 pirates, le cuisinier et le butin sont sauvés. Le butin est à nouveau partagé de la même manière et le cuisinier reçoit 5 pièces.

Traduire ces données à l'aide d'un système de congruences.

Quelle est alors la fortune minimale que peut espérer le cuisinier lorsqu'il décide d'empoisonner le reste des pirates ?

Exercice 2 :

On note A l'ensemble des suites réelles bornées et I l'ensemble des suites réelles convergeant vers 0.

1. Vérifier que A est un anneau pour les lois usuelles et que I est un idéal de A.
2. Existe-t-il $a \in A$ tel que $I = aA$?
3. L'idéal I est-il premier, c'est à dire tel que $\forall (u, v) \in A^2, (u \times v \in I \Rightarrow (u \in I \text{ ou } v \in I))$?
4. Existe-t-il un idéal strictement inclus entre I et A, c'est à dire un idéal J de A tel que $I \subset J \subset A$ tel que $I \neq J$ et $J \neq A$?
5. Déterminer le radical $\sqrt{I}$ de I défini par $\sqrt{I} = \{u \in A : \exists p \in \mathbb{N}^*, u^p \in I\}$.

Exercices en temps libre : Semaine 1

Rédiger au moins un des 2 exercices.

Exercice 1 :

Une bande de 17 pirates dispose d'un butin composé de N pièces d'or d'égale valeur. Ils décident de se le partager également et de donner le reste au cuisinier (non pirate). Celui ci reçoit 3 pièces. Mais une rixe éclate et 6 pirates sont tués. Tout le butin est reconstitué et partagé entre les survivants comme précédemment ; le cuisinier reçoit alors 4 pièces. Dans un naufrage ultérieur, seuls 6 pirates, le cuisinier et le butin sont sauvés. Le butin est à nouveau partagé de la même manière et le cuisinier reçoit 5 pièces.

Traduire ces données à l'aide d'un système de congruences.

Quelle est alors la fortune minimale que peut espérer le cuisinier lorsqu'il décide d'empoisonner le reste des pirates ?

Exercice 2 :

On note A l'ensemble des suites réelles bornées et I l'ensemble des suites réelles convergeant vers 0.

1. Vérifier que A est un anneau pour les lois usuelles et que I est un idéal de A.
2. Existe-t-il $a \in A$ tel que $I = aA$?
3. L'idéal I est-il premier, c'est à dire tel que $\forall (u, v) \in A^2, (u \times v \in I \Rightarrow (u \in I \text{ ou } v \in I))$?
4. Existe-t-il un idéal strictement inclus entre I et A, c'est à dire un idéal J de A tel que $I \subset J \subset A$ tel que $I \neq J$ et $J \neq A$?
5. Déterminer le radical $\sqrt{I}$ de I défini par $\sqrt{I} = \{u \in A : \exists p \in \mathbb{N}^*, u^p \in I\}$.

CORRECTIONS :
Exercice 1 :
Soit n le nombre de pièces du trésor. On traduit les hypothèses en écrivant que $n \equiv 3[17]$, $n \equiv 4[11]$ et $n \equiv 5[6]$. C'est donc un système de 3 équations à congruence. On remarque que $17, 11$ et 6 sont deux à deux premiers entre eux.
En particulier, $2 \cdot 17 - 3 \cdot 11 = 1$.
- Donc $-33 \equiv 1[17]$ et $(-3) \cdot 11 = -99 \equiv 3[17]$.
- Donc $34 \equiv 1[11]$ et $4 \cdot 34 = 136 \equiv 4[11]$.

Donc, $n_0 = -99 + 136 = 37$ vérifie à la fois $n_0 \equiv 3[17]$ et $n_0 \equiv 4[11]$.
On peut donc par théorème chinois réduire le système $\begin{cases} n \equiv 3[17] \\ n \equiv 4[11] \end{cases}$ à l'équation $n \equiv 37[11 \times 17] \equiv 37[187]$.
On cherche donc n tel que $n \equiv 37[187]$ et $n \equiv 5[6]$.
En remarquant que $1 \cdot 187 - 31 \cdot 6 = 1$ et par le procédé précédent, on obtient les solutions du système initial sous la forme $n \equiv 785[1122]$.
Donc la fortune minimale du trésor est de 785 pièces...
Exercice 2 :

1. la suite constante égale à 1 est bornée donc dans A. Pour toutes suites (u, v) bornées, $u - v$ est bornée et uv est bornée.
La suite nulle converge vers 0 donc $0 \in I$. Si $(u, v) \in I^2$, $u - v \in I$ par théorème opératoire sur les limites de suites convergentes vers 0. Si a est une suite bornée et si u converge vers 0, le produit converge vers 0 par théorème des gendarmes en prenant la valeur absolue et en majorant $|a|$ par une borne réelle.
I est donc un idéal de A.

2. Non : l'idéal I n'est pas monogène.
Supposons par l'absurde qu'il existe a tel que $I = aA$. Alors $u_1 = (\dfrac{1}{n+1})_{\mathbb{N}^*}$ est un élément de A donc il existe $a_1 \in A$ telle que $u_1 = a_1 \cdot a$.
Ainsi, nécessairement, a ne s'annule jamais car u_1 ne s'annule jamais. Remarquons que $a \in I \Rightarrow \sqrt{a} \in I$. Il existe donc une suite $a_2 \in A$ telle que $\sqrt{a} = a_2 \cdot a$. Or nécessairement, $a_2 = \dfrac{1}{\sqrt{a}}$ qui n'est pas bornée donc ne peut pas appartenir à A. Contradiction et résultat.

3. Soit u telle que $u_n = n[2]$ et v telle que $v_n = (n+1)[2]$. Alors $u \times v = 0 \in I$. Pourtant ni u ni v ne converge vers 0. Donc I n'est pas premier.

4. Soit J l'ensemble des suites réelles u telles que (u_{2n}) soit bornée et que (u_{2n+1}) converge vers 0.
Vérifier que $I \subset J \subset A$ et que J est un idéal.

5. Soit a dans A et $p \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$a^p \in I \Leftrightarrow a_n^p \to 0 \Leftrightarrow a_n \to 0 \Leftrightarrow a \in I.$$

Donc $\sqrt{I} = I$.