Exercice MPSI :
Soient $f : E \mapsto F$ et $g : F \mapsto G$ deux applications.

1. Montrer que si $g \circ f$ est injective et f surjective, alors g est injective.

2. Montrer que si $g \circ f$ est surjective et g est injective, alors f est surjective.

Exercice 1 :
On note $\star$ la loi interne dans $G = \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ définie, pour tous $(z,t),(z',t') \in G$ par :

$$(z,t) \star (z',t') =' z + z', t + t' + Im(\overline{z}z')).$$

Montrer que $(G, \star)$ est un groupe. Est-il commutatif ?
Exercice 2 :
Soient $(G, \cdot)$ un groupe, e son neutre, $a, b \in G$ tels que $ba = ab^2$ et $ab = ba^2$. Montrer que $a = b = e$
Exercice 3 :
Montrer que les groupes $(\mathbb{Z}, +)$ et $(\mathbb{Z}^2, +)$ ne sont pas isomorphes.

CORRECTIONS :
Exercice MPSI :
Exercice 1 :
La loi $\star$ est une loi interne en particulier parce que la partie imaginaire d'un nombre complexe est un nombre REEL.
On vérifie par le calcul l'associativité de la loi $\star$:
$[(z,t) \star (z',t')] \star (z'',t'') = (z+z', t+t'+Im(\overline{z}z')) \star (z'',t'') = (z+z'+z'', t+t'+t''+Im(\overline{z}z')+Im(\overline{z+z'}z'')$
... $= (z+z'+z'', t+t'+t''+Im(\overline{z}z')+Im(\overline{z}z''+Im(\overline{z'}z'')$
Et
$(z,t) \star [(z',t') \star (z'',t'')] = (z,t) \star (z'+z'', t'+t''+Im(\overline{z'}z'')) = (z+z'+z'', t+t'+t''+Im(\overline{z'}z'')+Im(\overline{z}z'+Im(\overline{z}z'')$
Donc $[(z,t) \star (z',t')] \star (z'',t'') = (z,t) \star [(z',t') \star (z'',t'')]$.
On vérifie par le calcul que $(0,0)$ est le neutre.
Ensuite, pour (z,t) donné, on cherche (z',t') symétrique tel que $(z,t) \star (z',t') = (0,0)$.
Analyse : nécessairement, $(z+z', t+t'+Im(\overline{z}z') = 0$ et $(z'+z, t'+t+Im(\overline{z'}z) = 0$.
Nécessairement, $z = -z'$ et $t+t'+Im(-|z|^2) = 0$. Or $Im(-|z|^2) = 0$, donc $t = -t'$.
Nécessairement, $z' = -z$ et $t' = -t$. Donc le seul symétrique possible de (z,t) est $(-z,-t)$.
Synthèse : réciproquement, on vérifie alors que $(-z,-t) \star (z,t) = (z,t) \star (-z,-t) = (0,0)$, donc $(-z,-t)$ est le symétrique de (z,t).
(Remarque : on pouvait raisonner par équivalence, mais c'est déconseillé en général)
Donc G est un groupe.
Exercice 2 :
On a $ab = ab^2 = (ab)b = (ba^2)b = (ba)(ab)$. Comme ba est inversible dans G, en multipliant les deux membres par $(ab)^{-1}$ à gauche, on obtient $e = ab$. Donc $b = a^{-1}$ et $ba = e$. Ensuite, $e = ab = ba^2 = (ba)a = ea = a$ et donc $a = e$ et finalement $b = e$.
Exercice 3 :
Par l'absurde, si f est un tel isomorphisme, soit $(a,b) = f(1)$.
Comme f est un isomorphisme, il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $f(n) = (1,0)$. Alors $(1,0) = f(n) = nf(1) = n(a,b) = (na, nb)$ Donc $na = 1$ et $nb = 0$. Donc $n \neq 0$ et finalement $b = 0$.
En procédant de même à partir de $(0,1)$, on obtiendrait que $a = 0$.
Alors $f(1) = (0,0) = f(0)$ car f est un morphisme de groupes, ce qui contredit l'injectivité de f.