Exercice 1 :

Soient a et b deux réels, $a < b$. On considère la fonction $f : [a,b] \longrightarrow [a,b]$ supposée continue et une suite récurrente $(u_n)_n$ définie par : $u_0 \in [a,b]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. On suppose ici que f est croissante. Montrer que $(u_n)_n$ est monotone et en déduire sa convergence vers une solution de l'équation $f(x) = x$.

2. *Application.* Calculer la limite de la suite définie par : $u_0 = 4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{4u_n+5}{u_n+3}$.

3. On suppose maintenant que f est décroissante. Montrer que les suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont monotones et convergentes.

4. *Application.* Soit $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = (1-u_n)^2$. Calculer les limites des suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$.

Exercice 2

1. Soit $f : [0,1] \to [0,1]$.

- **a.** On suppose que f est continue. Montrer que f admet un point fixe.
- **b.** On suppose que f est croissante. Montrer que f admet un point fixe.

2. Soient f et g des fonctions continues de $[0\,;1]$ dans $[0\,;1]$ telles que $f \circ g = g \circ f$.

- **a.** Montrer que l'ensemble des points fixes de f possède un plus grand et un plus petit élément.
- **b.** Montrer l'existence de $c \in [0\,;1]$ tel que $f(c) = g(c)$.