Série 1 :

1. Rappeler la définition d'une tribu $\mathcal{T}$. Comment appelle-t-on un élément de $\mathcal{T}$?
2. Rappeler la définition d'une fonction probabilité et les trois modèles standards d'espaces probabilisés (pile ou face fini, temps d'attente du premier succés et pile ou face infini)

   On donnera à chaque fois l'univers, la tribu et la fonction probabilité sur un ensemble qui engendre la tribu.
3. Rappeler le théorème de la limite monotone pour une fonction probabilité.
4. Citer avec toutes les hypothèses, la formule des probabilités totales.
5. Lorsque I est une partie de $\mathbb{N}$, comment vérifier que la famille $(x_i)_{i\in I}$ est sommable ?
6. Donner la loi, l'espérance, la variance et la fonction génératrice de X qui suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.
7. Déterminer la loi de $X+Y$ lorsque X suit une loi de Poisson de paramètre λ et Y suit une loi de Poisson de paramètre μ et X, Y indépendantes. En déduire $\mathbb{E}(X+Y)$ et $\mathbb{V}(X+Y)$

Série 1 :

1. Une tribu est une partie de $\mathcal{P}(\Omega)$ qui est stable par complémentaire et union dénombrable et contient au moins l'ensemble Ω.
Un élément de $\mathcal{T}$ est appelé **événement**.

2. Une *probabilité* est une application $\mathbb{P} : \mathcal{T} \to \mathbb{R}$ (en réalité $[0,1]$) telle que :
— $\forall A \in \mathcal{T}, \mathbb{P}(A) \geqslant 0$,
— $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,
— Pour toute *famille au plus dénombrable* (A_n) d'évènements deux à deux incompatibles,

$$\mathbb{P}(\bigsqcup_n A_n) = \sum_n \mathbb{P}(A_n).$$

Jeu de pile ou face fini : $\Omega = \{P,F\}^n$, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2^n}\operatorname{Card}(A)$.
Attente du premier succès : $\Omega = \{P, FP, FFP, \dots\} \cup \{FFF\dots\}$, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}(F^kP) = \frac{1}{2^{k+1}}$, $\mathbb{P}(F^\infty) = 0$, $\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\omega)$.
Jeu de pile ou face infini : $\Omega = \{P,F\}^{\mathbb{N}}$, $\mathcal{T}$ = la tribu engendrée par les ensembles de la forme $A_n \times \Omega$ avec $A_n \subset \{P,F\}^n$, $\mathbb{P}$ = l'unique probabilité sur $\mathcal{T}$ pour laquelle $\mathbb{P}(A_n \times \Omega) = \frac{1}{2^n}\operatorname{Card}(A_n)$. L'existence et l'unicité de $\mathbb{P}$ sont admises.

3. Si (A_n) est une suite d'évènements **croissante pour l'inclusion** alors $\mathbb{P}(\bigcup_n A_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

4. **Formule des probabilités totales :** si $\Omega = \bigsqcup_n A_n$ (on dit que la famille (A_n) est un système complet d'événements) et $\forall\, n$, $\mathbb{P}(A_n) > 0$:

$$\mathbb{P}(B) = \sum_n \mathbb{P}_{A_n}(B)\mathbb{P}(A_n)$$

5. Lorsque I est une partie de $\mathbb{N}$, comment une famille $(x_i)_{i\in I}$ est sommable ssi $\sum_i |x_i|$ est une série convergente, c'est à dire, quitte à poser $x_i = 0$ si $i \notin I$, la suite des sommes partielles $U_n = \sum_{i=0}^n |x_i|$ est une suite convergente.

6. $\mathcal{G}(p) \sim T = \inf\{k \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } X_k = 1\}$ ($= \infty$ si $\forall\, k$, $X_k(\omega) = 0$) où $(X_1, X_2, \dots)$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi $\mathcal{B}(p)$, $p \in\,]0,1[$.
$T(\Omega) = \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. $\mathbb{P}(T = k) = q^{k-1}p$ si $k \geqslant 1$, $\mathbb{P}(t = 0) = \mathbb{P}(T = \infty) = 0$, $\mathbb{P}(T > k) = q^k$.
$\mathbb{E}(X) = 1/p$, $\mathbb{V}(X) = q/p^2$, $G_X(t) = pt/(1-qt)$.

7. La loi de Poisson de paramètre λ est la loi de probabilité sur $\mathbb{N}$ définie par la formule $\mathbb{P}(X = n) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}$.
Elle est notée $\mathcal{P}(\lambda)$. Alors $\mathbb{E}(X) = \lambda$, $\mathbb{V}(X) = \lambda$, $G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$.
Donc $G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t) = e^{(\lambda+\mu)(t-1)}$ car X, Y sont indépendantes.
Comme la fonction génératrice caractérise une loi, $X + Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.
Et $\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{V}(X+Y) = \lambda + \mu$