

# RÉVISIONS 5 : ALGÈBRE BILINÉAIRE

## I — Le B.A.BA

### 1) Définitions théorèmes :

Liste non exhaustive des éléments du cours à maîtriser :

1. Définition d'un p.s.e. Exemples sur  $\mathbb{R}^n$ , sur  $\mathbb{R}[X]$ , sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  **Exo 81**, sur  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ , sur  $\mathcal{L}^2(I, \mathbb{R})$ , sur  $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ .
2. Inégalité de Cauchy-Schwarz **Exo 76-79**. Inégalité triangulaire. Norme euclidienne associée.
3. Identité remarquable. Identité du parallélogramme. Identité de polarisation.
4. Orthogonal d'une partie **Exo 77-80**. Théorème du supplémentaire orthogonal pour un s.e.v. de DF. Théorème de la projection orthogonale sur un s.e.v. de DF. Distance à un s.e.v. de DF.
5. Projection orthogonale. Propriétés. Expression de la projection orthogonale sur un s.e.v. de DF dans une BON.
6. Orthonormalisation de Schmidt.
7. Suite totale. Inégalité de Bessel. Égalité de Parseval.
8. Application orthogonale.  $\mathcal{O}(E)$ . Isométrie vectorielle. Expression dans une BON **Exo 78**. Propriétés. Description de  $\mathcal{O}(E)$  pour  $\dim(E) \leq 3$ .
9. Endomorphisme symétrique.  $\mathcal{S}(E)$ . Stabilité de l'orthogonal.
10. Théorème spectral géométrique. Théorème spectral matriciel **Exo 68**.
11. Endomorphisme antisymétrique. Définition.

## II — Exercices :

### 1) Exercices d'approfondissement :

#### Exercice 1 :

Soit  $p$  une projection. Montrer que  $p$  est une projection orthogonale  $\Leftrightarrow \forall (x, y) \in E, (p(x)|y) = (x|p(y)) \Leftrightarrow \forall x \in E, \|p(x)\|_2 \leq \|x\|_2$ .

#### Exercice 2 :

Orthonormaliser  $(1, X, X^2)$  pour le produit scalaire  $(P|Q) = \int_{[-1,1]} PQ$ . En déduire la distance de  $X^3$  au sous espace  $\mathbb{R}_2[X]$ .

## III — Problème(s).