Révisions 4 : Algèbre générale

I — Le B.A.BA

1) Définitions théorèmes :

Liste non exhaustive des éléments du cours à maîtriser :

1. Définition d'un groupe, d'un sous groupe, d'un morphisme de groupes. Image et noyau d'un morphisme.
2. Permutations. Calcul d'une signature.
3. Théorème de Lagrange (ordre d'un élément, ordre d'un sous groupe)
4. Construction de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$: compatibilité de la somme et du produit de classes d'équivalence (**Exo 66**) .
5. Définition d'un anneau. Anneau intègre. Diviseurs de 0. Identités remarquables pour des éléments qui commutent.
6. L'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps ssi n est premier (**Exo 66**).
7. Morphisme d'anneau. Idéal. Idéal engendré. Idéaux de $(\mathbb{Z}, +\times)$ et de $\mathbb{K}[X], +, \times)$.
8. Générateurs de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Indicatrice d'Euler.
9. Théorème des restes chinois. Version groupe et version anneau. L'indicatrice d'Euler est "multiplicative".
10. Formule d'Euler. Petit théorème de Fermat (**Exo 86**).

II — Exercices :

1) Exercices d'échauffement :

(1) : **Exo 94** : système de congruence.

2) Exercices d'approfondissement :

Exercice 1 :

Soit x élément d'une groupe cyclique de cardinal n. Calculer x^n.

Exercice 2 :

Soit

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & \ddots & 1 \\ 1 & (0) & & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$

1. *Calculer le polynôme caractéristique de M. La matrice M est-elle diagonalisable ? est-elle inversible ?*
2. *Soit $G = \left\{ M^k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$. Montrer que G est une groupe cyclique et préciser son cardinal.*

Exercice 3 :

Soit $n \geqslant 2$.

(1) : *Montrer que les sous-groupes de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ sont engendrés par les classes des diviseurs de n.*

(2) : *Combien le groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ admet-il de sous-groupes ?*

Exercice 4 :

Soit $d \in \mathbb{N}$*, on note* $\mathbb{Z}\left[\sqrt{d}\right] = \left\{a + b\sqrt{d} \mid (a,b) \in \mathbb{Z}^2\right\}$.
Montrer que $\mathbb{Z}\left[\sqrt{d}\right]$ *est un sous-anneau de* $(\mathbb{R}, +, \times)$.

Exercice 5 :

Résoudre les systèmes suivants :

(1) : $\begin{cases} x \equiv 1\ [6] \\ x \equiv 2\ [7] \end{cases}$

Réponse : $x \in 37 + 42\mathbb{Z}$. (2) : $\begin{cases} 3x \equiv 2\ [5] \\ 5x \equiv 1\ [6] \end{cases}$

Réponse : $29 + 30\mathbb{Z}$.

(3) : *Combien y a-t-il d'éléments inversibles dans* $\mathbb{Z}/2200\mathbb{Z}$ *?*

III — Démonstrations classiques :

1. Sous groupes de $(\mathbb{Z}, +)$. Idéaux de $\mathbb{K}[X]$.
2. Dans un groupe fini, l'ordre d'un élément divise l'ordre du groupe. (démonstration dans le cas commutatif)
3. Résolution d'un système de congruence.
4. $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$.
5. L'union de sous groupes n'est pas forcément un sous groupe. L'intersection est un sous groupe.
6. $(Q, +)$ et $(Q^*, \times)$ ne sont pas isomorphes.
7. Montrer qu'un sous groupe de $(\mathbb{R}, +)$ est soit monogène, soit dense.