# Révisions 3 : Suite/Série de fonctions

## I — Le B.A.BA

### 1) Définitions théorèmes :

Liste non exhaustive des éléments du cours à maîtriser :

**1.** Définitions de convergence simple, uniforme locale, uniforme d'une suite de fonctions **Exo 9 CCP**.

**2.** Définition de convergence simple, uniforme locale, uniforme, normale d'une série de fonctions **Exo 18, 15 CCP**.

**3.** Donner des exemples et contre exemples à partir des fonctions $f_n : x \mapsto x^n$ et $g_n : x \mapsto \frac{x^n}{n}$.

**4.** Propriétés qui passent à la limite simple.

**5.** Propriétés qui passent à la limite uniforme **Exo 10, 12, 13 CCP**.

**6.** Théorème d'intégration terme à terme, de dérivation terme à terme.

**7.** Théorème de la double limite finie.

**8.** Théorème de continuité d'une intégrale à paramètre. Théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre (Leibniz)

**9.** Domaine de convergence d'une série entière. Domaine de convergence d'une série entière. Lemme d'Abel.

**10.** Rayon de convergence et relations de comparaison **Exo 20 CCP**.

**11.** Règle de d'Alembert pour les séries entières (en dernier recours...)

**12.** Somme de séries entières **Exo 22 CCP**. Produit (de Cauchy) de séries entières.

**13.** Régularité d'une série entière. Dérivée terme à terme. Primitive.

**14.** Définition de la série de Taylor d'une fonction de classe $C^\infty$. 3 cas possibles.

**15.** DSE usuels.

## II — Exercices :

### 1) Exercices d'échauffement :

(1) : Série "alternée" de fonctions **Exo 8 CCP**

(2) : Convergences **Exo 11, 17, 53 CCP**

(3) : Convergence uniforme et intégration **Exo 14 CCP**

(4) : Convergence et dérivation **Exo 16 CCP**

(5) : Convergence dominée **Exos 26, 27 CCP**

(6) : Calcul intégral par équation différentielle **Exo 30 CCP**

**2) Exercices d'approfondissement :**

**Exercice 1 :** Convergences

(1) : *Montrer que la suite de fonctions* $f_n : x \mapsto \exp(-nx)\sin(nx)$ *converge simplement sur* $\mathbb{R}_+^*$, *que la convergence est uniforme sur tout intervalle de la forme* $[a, +\infty[$ $(a > 0)$ *mais qu'elle n'est pas uniforme sur* $\mathbb{R}_+^*$.

(2) : *Montrer que la série de fonctions* $\sum f_n$ *définie sur* $\mathbb{R}_+$ *par* $f_n(x) = (-1)^n \dfrac{x}{n^2+x^2}$ *est uniformément convergente sur* $\mathbb{R}_+$ *mais n'est pas normalement convergente.*
*Étudier la limite de sa somme lorsque* $x$ *tend vers* $+\infty$.
*Démontrer que sa somme est de classe* $C^1$ *sur* $\mathbb{R}_+$.

**Exercice 2 :** Somme d'une série entière par équation différentielle

*Soit* $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \binom{2n}{n} \dfrac{1}{2n-1} x^n$. *Déterminer le rayon de convergence de* $f$. *Montrer que* $2f = (1+4x)f'$ *et en déduire* $f$.

**Exercice 3 :** Série entière et dénombrement

*Étant donné un entier naturel non nul* $n$ *et un ensemble fini à* $n$ *élements* $E$, *on note* $a_n$ *le nombre de bijections de* $E$ *dans* $E$ *sans point fixe. On pose par convention* $a_0 = 1$.

(1) : *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_{n-k}$ *en dénombrant les bijections de* $E$ *dans* $E$ *en discutant du nombre de leurs points fixes.*

(2) : *On pose* $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{a_n}{n!} x^n$. *Démontrer que cette série entière admet un rayon de convergence non nul et donner une expression algébrique de la fonction* $x \mapsto \exp(x) \cdot f(x)$.

(3) : *En déduire la valeur de* $a_n$ *et la limite de* $\dfrac{a_n}{n!}$ *lorsque* $n$ *tend vers* $+\infty$.
*Donner une interprétation de ce résultat en termes de probabilité.*

## III — Problème(s).