# Révisions 2 : Analyse réelle

## I — Le B.A.BA

### 1) Définitions théorèmes :

Liste non exhaustive des éléments du cours à maîtriser :

— Dérivation de $f : \mathbb{R} \to E$ où $E$ est un $\mathbb{K}$-evn de dimension finie. $DL_1(a)$ de $f$. Vecteur dérivé $f'(a)$. Dérivation des fonctions composantes.
— Soit $f : \mathbb{R} \to E$ dérivable en $a$. Soit $L$ linéaire de $E$ dans $F$, $B$ bilinéaire de $E^2$ dans $F$. Dérivation de $L \circ f$ en $a$. Dérivation de $B(f, g)$ en $a$.
— Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable en $a$ et $f\mathbb{R} \to E$ dérivable en $\phi(a)$. Dérivation de $f \circ \phi$ en $a$.
— Énoncer le théorème de l'extremum pour une fonction de $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ puis pour une fonction de $U \subset \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.
— Énoncer le théorème de Rolle pour une fonction de $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Est-il valable pour une fonction à valeur dans $\mathbb{R}^n$ ?
— Énoncer l'égalité des accroissements finis pour une fonction de $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Est-elle valable pour une fonction à valeur dans $\mathbb{R}^n$ ?
— Énoncer l'inégalité des accroissements finis pour une fonction de $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Est-elle valable pour une fonction à valeur dans $\mathbb{R}^n$ ?
— Citer le théorème du prolongement dérivable. Donner l'exemple d'une fonction dérivable mais pas de classe $C^1$. **Exo 4 CCP**
— Définir une fonction convexe sur $I \subset \mathbb{R}$. Rappeler la caractérisation par l'inégalité des pentes puis celle par la position relative des cordes, de la courbe et des tangentes. Rappeler la caractérisation des fonctions convexes de classe $C^2$.
— Citer le théorème des sommes de Riemann.
— Citer les formules de Taylor.
— Citer le théorème de Stone et Weierstrass.
— Citer les théorèmes de comparaison des séries numériques à termes positifs. Donner le théorème de comparaison des sommes partielles ou des restes de séries.
— Démontrer le critère spécial des séries numériques alternées **Exos 8 et 26 CCP**.
— Citer le théorème de comparaison d'une série et d'une intégrale **Exo 7 CCP**. En déduire les critères de convergence des séries Riemann et des séries de Bertrand **Exo 5 CCP** .
— Citer la règle de D'Alembert pour les séries numériques **Exo 6 CCP**.
— Citer le théorème de permutation des termes d'une série.
— Donner la définition d'une série double convergente. Citer le théorème de Fubini pour les séries doubles. Citer la formule du produit de Cauchy pour les séries doubles.
— Citer la formule d'intégration par parties et de changement de variable bijectif pour une intégrale généralisée. (1) : Citer les théorème de comparaison d'intégrales de fonctions positives.
— Citer le théorème d'intégration terme à terme de Beppo Levi.
— Citer le(s) théorème(s) de convergence dominée (paramètre discret puis continu).

## II — Démonstrations classiques à connaître :

— Montrer que pour $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ réels strictement positifs, $\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leqslant \dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$.
— Dériver $G : x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$ par rapport à $x$ **Exo 56 CCP**.
— Démontrer la formule de Taylor Intégral.
— Soit $f$ continue sur $[0, 1]$. Montrer que si $\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^1 f(x)x^n\,\mathrm{d}x = 0$, alors $f$ est nulle **Exo 48 CCP**.
— Énoncer et démontrer le lemme de Cesàro.

— Montrer que $H_n = \ln(n) + \gamma + \dfrac{1}{2n} + o(1/n)$.

— Montrer que $\sum_{p,q} \dfrac{1}{p^\alpha + q^\alpha}$ converge $\Leftrightarrow \alpha > 2$.

— Étude de la fonction $\Gamma$ (relation fonctionnelle, variations, limites, convexité).

— Montrer la semi-convergence de $\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

## III — Exercices :

### 1) Exercices d'échauffement :

(2) : Formule de Leibniz : **Exo 3 CCP**

(3) : Intégrabilité : **Exo 28 CCP**.

(4) : Fonction Gamma : **Exo 29 CCP**

(5) : Intervertion des symboles série/intégrale : **Exo 19 CCP**

(6) : Convergence dominée : **Exo 25 CCP**

(7) : Un peu de topologie : **Exo 37 CCP** et **Exo 54 CCP**.

### 2) Exercices d'approfondissement :

**Exercice 1 :** Démonstration du théorème de Stone et Weierstrass :

*Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$, on pose $B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f(\frac{k}{n}) x^k (1-x)^{n-k}$ (polynôme de Bernstein).*

**1.** *Montrer que si $S_n$ est une v.a.r.d. suivant une loi binomiale de paramètres $(n,x)$, alors*

$$\forall \alpha > 0, \mathbb{P}(|S_n - nx| > n\alpha) \leqslant \frac{1}{4n\alpha^2}.$$

**2.** *Soit la v.a.r.d. $f(\frac{S_n}{n})$. Démontrer que $\mathbb{E}\left(f(\frac{S_n}{n})\right) = B_n(f)(x)$.*

**3.** *Soit $\varepsilon > 0$. Justifier qu'il existe $\alpha > 0$ tel que si $a$ et $b$ sont des réels de $[0,1]$ tels que $|a-b| \leqslant \alpha$, alors $|f(a) - f(b)| \leqslant \varepsilon$ puis majorer $|f(k/n) - f(x)|$ lorsque $k \in [0,n]$ vérifie $|k/n - x| \leqslant \alpha$.*

**4.** *Justifier que*

$$\left| \sum_{|\frac{k}{n} - x| > \alpha} (f(k/n) - f(x))\mathbb{P}(S_n = k) \right| \leqslant 2||f||_\infty \cdot \mathrm{P}\left( |\frac{S_n}{n} - x| > \alpha \right).$$

**5.** *Démontrer qu'il existe un entier naturel $n_0$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$ et tout réel $x \in [0,1]$,*

$$B_n(f)(x) - f(x)| \leqslant 2\varepsilon$$

*et en déduire le théorème de Stone et Weierstrass.*

**Exercice 2 :** Transformation d'Abel :

*Montrer que la série $\sum \dfrac{e^{in}}{n}$ est semi-convergente.*

**Exercice 3 :** Point fixe

*Soit $K$ un compact de $E$ (evn) et $f : K \to K$ telle que $\forall (x,y) \in K^2, x \neq y \Rightarrow ||f(x) - f(y)|| < ||x - y||$.*

**1.** *Montrer que $f$ admet un unique point fixe noté $\ell$. On pourra considérer l'application $h : K \to \mathbb{R}$ telle que $h(x) = ||f(x) - x||$.*

**2.** *Soit $(u_n) \in K^{\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in K$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que la suite $(u_n)$ converge vers $\ell$.*

**Exercice 4 :** Uniforme continuité

*Montrer qu'une fonction $f$ continue sur $\mathbb{R}_+$ ayant une limite finie en $+\infty$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$.*