Révisions 1 : Algèbre linéaire

I — Le B.A.BA

1) Définitions théorèmes :

Liste non exhaustive des éléments du cours à maîtriser :

- Base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. SEV classiques (matrices triangulaires, (anti)symétriques, diagonales...) : bases et dimensions.
- Déterminant : forme n linéaire alternée sur E de dimension n. Forme antisymétrique. Si $2 \neq 0$, une forme est alternée ssi elle est antisymétrique.
- Structure : l'espace vectoriel des formes n-linéaire alternée sur E de dimension n est une droite.
- Formule du déterminant. Propriétés élémentaires ($\det(\lambda A)$, $\det({}^tA)$, $\det(AB)$, $\det(A^{-1})$). Conservation du déterminant par combinaisons linéaires de rangées. Déterminant par blocs/déterminant d'une matrice triangulaire.
- Cofacteur. Formule d'inversion.
- Polynôme caractéristique. Coefficients c_n, c_{n-1}, c_0. Théorème de Cayley-Hamilton.
- Idéal annulateur d'une matrice/d'un endomorphisme. Existence du polynôme minimal.
- Valeur propre, espace propre. Formule de changement de bases des endomorphismes.
- Invariants d'endomorphismes (trace, déterminant, polynôme caractéristique, polynôme minimal, valeurs propres, spectre...)
- Caractérisation d'une somme directe de plusieurs SEV.
- Multiplicité algébrique d'une valeur propre. Dimension géométrique du sous espace propre associé.
- CNS de trigonalisation/diagonalisation.
- Lemme des noyaux **Exos 62 et 93 CCP**.

II — Démonstrations classiques à connaître :

- Montrer que les sev propres d'un endomorphisme sont en somme directe. Donner un exemple où ils ne sont pas supplémentaires.
- Montrer que si f et g commutent, tout sev propre de f est stable par g.
- Montrer que si $P(f) = 0$, alors toute valeur propre de f est racine de P. Toute racine de P est-elle valeur propre de f ?
- Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que l'algèbre commutative $\mathbb{K}[M]$ est de dimension finie égale au degré du polynôme minimal de M. En donner une base.
- Montrer que les matrices qui commutent avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont les matrices scalaires.
- Montrer que si $\forall x \in E, \exists \lambda_x, f(x) = \lambda_x \cdot x$, alors f est une homothétie de E.
- Calcul du déterminant de Vandermonde.
- Calcul du déterminant d'une matrice compagne.

III — Exercices :

1) Exercices d'échauffement :

(1) : Réduction : **Exercice 70 CCP**
(2) : Calcul d'un déterminant trigonal : **Exo 63 CCP**.
(3) : Calcul des puissances d'une matrice par division euclidienne : **Exo 91 CCP**.
(4) : Définition, propriétés et étude d'une projection ou d'une symétrie vectorielle : **Exo 71 CCP**.
(5) : Définition et propriétés des polynômes de Lagrange : **Exos 90 et 87**.

2) Exercices d'approfondissement :

Exercice 1 : Élements propres

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$. *Pour* $P \in \mathbb{K}[X]$, *on pose* $\phi(P) = (2x+1)P - (X^2-1)P'$.

1. *Montrer que* ϕ *est un endomorphisme de* $\mathbb{K}[X]$.

2. *Soit* P *un vecteur propre de* ϕ. *Montrer que* $P' \neq 0$ *et en déduire que le degré de* P *est égal à 2.*

3. *Déterminer les éléments propres de* ϕ.

Exercice 2 : Une égalité classique

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. *Montrer que* $\det(\exp(A)) = \exp(\mathit{Tr}\,(A))$.

Exercice 3 : Théorème de Cayley-Hamilton :

Le but de cet exercice est de montrer le th. de Cayley-Hamilton. On s'interdira donc de l'utiliser pour sa résolution !

1. *Soit* $n \geqslant 2$ *et* $(a_0, \dots a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$. *Montrer que le polynôme caractéristique de la matrice*

$$A(a_0, \dots, a_{n-1}) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

est égal à

$$P = X^n - (a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0).$$

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-ev de DF non nulle* n *et* $f \in L(E)$ *dont on notera* P *le polynôme caractéristique.*
On fixe un élément non nul de E.

2. *Montrer qu'il existe un plus petit entier naturel* p *tel que la famille* $(x, f(x), \dots f^p(x))$ *est liée.*
Vérifier que $p \neq 0$.

3. *Soit* $F = Vect(x, f(x), \dots, f^{p-1}(x))$.
Montrer que F *est stable par* f *et que la famille* $(x, f(x), \dots, f^{p-1}(x))$ *en est une base.*

4. *On note* g *l'endomorphisme de* F *induit par* f.
Quelle est la matrice de g *dans cette base de* F *?*

5. *Soit* Q *le polynôme caractéristique de* g. *Montrer que* $Q(g)(x) = 0$.

6. *Montrer que* Q *divise* P *puis que* $P(f)(x) = 0$ *et conclure.*

IV — Problème(s).