Le but de ce problème est de généraliser les notions d'inverse d'un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ ou d'une matrice carrée à coefficients dans $\mathbb{C}$.

n désignant un entier supérieur ou égal à 2, on notera $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'espace des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes, ${}^tM$ la transposée d'une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et $\mathrm{tr}(M)$ la trace de M.

Soit a un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$. Pour b endomorphisme de $\mathbb{C}^n$, on envisage les propriétés suivantes :

$$(1) : a \circ b \circ a = a \quad ; \quad (2) : b \circ a \circ b = b \quad ; \quad (3) : a \circ b = b \circ a .$$

De même, soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Pour B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on envisage les propriétés suivantes :

$$(1) : ABA = A \quad ; \quad (2) : BAB = B \quad ; \quad (3) : AB = BA .$$

Si (1) et (2) sont vérifiées, on dit que b est un inverse faible de a ou que B est un inverse faible de A. Si (1), (2) et (3) sont vérifiées, on dit que b est un pseudo-inverse de a ou que B est un pseudo-inverse de A.

Partie I

1. On considère la matrice M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ suivante : $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Calculer M^3 et en déduire un inverse faible de M. Est-ce un pseudo-inverse ?

Vérifier que $N = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ est aussi un inverse faible de M. En est-ce un pseudo-inverse ?

2. Soit p une projection de $\mathbb{C}^n$ ($p^2 = p$). En écrivant la matrice de p dans une base pertinente, prouver que la trace de p est égale au rang de p.

On fixe dans toute la suite de cette partie un endomorphisme a non nul et de rang r de $\mathbb{C}^n$.

3. On suppose que b est un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ qui vérifie la propriété (1), c'est-à-dire que $a \circ b \circ a = a$.

a. Prouver que $a \circ b$ et $b \circ a$ sont des projections.

b. Prouver que $\mathrm{rg}(a) = \mathrm{rg}(a \circ b) = \mathrm{rg}(b \circ a) = \mathrm{tr}(a \circ b)$ (on pourra utiliser, après l'avoir prouvée, la propriété selon laquelle $\mathrm{rg}(u \circ v) \leq \inf(\mathrm{rg}(u), \mathrm{rg}(v))$).

4. On suppose dans cette seule question que a est inversible. Prouver alors l'existence et l'unicité d'un endomorphisme b vérifiant (1), et prouver que b est un pseudo-inverse de a.

5. On suppose que a possède des pseudo-inverses. Soient b et b' deux pseudo-inverses de a.

En calculant de deux façons différentes $a \circ b \circ a \circ b'$, prouver que $a \circ b' = b \circ a$, puis que $b = b'$. Conclure.

6. En supposant qu'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ possède un pseudo-inverse X, prouver que les matrices suivantes ont un pseudo-inverse, et le déterminer :

i. X ;

ii. λA, λ désignant un complexe non nul ;

iii. A^k, $k \in \mathbb{N}^*$;

iv. ${}^tA$;

v. PAP^{-1} où P est une matrice inversible quelconque.

7. On suppose dans cette seule question que A est une matrice diagonale. Prouver que A possède un pseudo-inverse, et le déterminer (on pourra chercher ce pseudo-inverse sous forme d'une matrice diagonale).

Partie II

On démontre dans cette partie que tout endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ possède au moins un inverse faible.

Soit donc a un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ fixé dans toute cette partie. On supposera a non inversible en vertu de la question **I.5.**

1. Soit $(e_1,\ldots,e_p)$ une base de $\ker(a)$ que l'on complète en une base $(e_1,\ldots,e_n)$ de E.

On pose, pour $k = p+1,\ldots,n$, $\varepsilon_k = a(e_k)$. Prouver que la famille $(\varepsilon_{p+1},\ldots,\varepsilon_n)$ est libre.

2. On complète la famille $(\varepsilon_{p+1},\ldots,\varepsilon_n)$ en une base $(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)$ de E.

a. Soit b un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ vérifiant $b(\varepsilon_k) = e_k$ pour $k = p+1,\ldots,n$.
Vérifier que $a \circ b \circ a = a$.

b. Comment choisir $b(\varepsilon_1),\ldots,b(\varepsilon_p)$ pour que l'on ait aussi $b \circ a \circ b = b$? Conclure.

Partie III

Il s'agit dans cette partie de donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ possède un pseudo-inverse.

Soit donc a un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ fixé dans toute cette partie.

1. On suppose ici que a admet un pseudo-inverse b.

a. Montrer que a et b ont même image, même noyau, et que $\mathbb{C}^n = \mathrm{Im}(a) \oplus \ker(a)$.

b. Montrer que $a \circ b$ est la projection sur $\mathrm{Im}(a)$ parallèlement à $\ker(a)$.

2. On suppose ici que $\mathrm{Im}(a) \cap \ker(a) = \{0\}$.

a. Montrer que $\mathbb{C}^n = \mathrm{Im}(a) \oplus \ker(a)$.

b. Montrer que pour tout élément v de $\mathbb{C}^n$, il existe w unique dans $\mathrm{Im}(a)$ vérifiant :

$$a(w) - v \in \ker(a).$$

c. On note $w = b(v)$. Montrer que l'application b ainsi définie est un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ et que c'est un pseudo-inverse de a (on pourra prouver au préalable que $\ker(a) \subset \ker(b)$).

3. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que a possède un pseudo-inverse.

Partie IV

On fixe encore dans cette partie un endomorphisme a de $\mathbb{C}^n$. Il s'agit de prouver que l'endomorphisme a^n possède un pseudo-inverse.

Pour k entier strictement positif, on notera $N_k = \ker(a^k)$ et $I_k = \mathrm{Im}(a^k)$.

1. Prouver que les suites (N_k) et (I_k) sont respectivement croissante et décroissante au sens de l'inclusion.

2. **a.** Prouver l'existence d'un entier q vérifiant $N_q = N_{q+1}$.

b. Soit p un entier tel que $N_p = N_{p+1}$. Prouver alors que $N_{p+1} = N_{p+2}$, puis que pour tout entier positif k, on a $N_p = N_{p+k}$.

3. Notons s le plus petit des entiers p vérifiant la propriété : $N_p = N_{p+1}$.

a. Prouver que $\mathbb{C}^n = N_s \oplus I_s$. En déduire que a^s possède un pseudo-inverse.

b. Comparer I_s et I_k pour k entier supérieur ou égal à s. En déduire que a^k possède un pseudo-inverse pour tout entier k supérieur ou égal à s.

c. Prouver que $s \leq n$ (on pourra envisager deux cas, suivant que a est inversible ou non). Conclure.

4. Pour k entier quelconque, on note $\delta_k = \dim I_k - \dim I_{k+1}$.

a. Établir l'existence d'un sous-espace vectoriel D_k de E tel que $I_k = I_{k+1} \oplus D_k$ et donner sa dimension.

b. Prouver que $I_{k+1} = I_{k+2} + a(D_k)$.

c. En déduire que la suite (δ_k) décroît. Qu'a-t-on prouvé ?

Partie V

On appelle "matrice circulante" une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \end{bmatrix} \text{ où les } a_i \text{ sont des complexes quelconques.}$$

1. Soit $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Calculer C^2, C^3 et C^4, et vérifier que I_4, C, C^2, C^3 sont des matrices circulantes.

2. Montrer que les matrices circulantes de $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ constituent un espace vectoriel, dont une base est la famille (I_4, C, C^2, C^3). Donner la décomposition d'une matrice circulante de $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ sur cette base.

3. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$. Prouver que A est une matrice circulante si et seulement si $AC = CA$.

En déduire que le produit de deux matrices circulantes de $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ est une matrice circulante, et que l'inverse d'une matrice circulante inversible de $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ est aussi une matrice circulante.

4. Déterminant d'une matrice circulante

On considère une matrice circulante de $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{bmatrix}.$$

Soient les vecteurs de $\mathbb{C}^4$ suivants :

$$e_1 = (1,1,1,1) \ ; \ e_2 = (1,-1,1,-1) \ ; \ e_3 = (1,\mathrm{i},-1,-\mathrm{i}) \ ; \ e_4 = (1,-\mathrm{i},-1,\mathrm{i}).$$

On note E_1, E_2, E_3, E_4 les vecteurs colonnes correspondants.

a. Prouver que la famille (e_1, e_2, e_3, e_4) est une base de $\mathbb{C}^4$.

b. Calculer AE_i pour $i = 1,2,3,4$, et exprimer le résultat obtenu en fonction de E_i.

c. En déduire que A est semblable à une matrice diagonale que l'on déterminera, puis calculer $\det A$.

5. Pseudo-inverse d'une matrice circulante

On garde dans cette question les notations de la question **4.**.

a. Comparer les rangs des matrices A et A^2

b. En déduire que A possède un pseudo-inverse.