Correction Mines PC 2 : Problème de Waring

Gilbert Primet gilbert.primet@9online.fr

9 mai 2016

Merci d'adresser vos éventuelles remarques et corrections à l'adresse ci-dessus.

A Propriétés élémentaires du Wronskien

1. On pose $(d)_0 = 1$.
   $(d)_k = d(d-1)\cdots(d-k+1)$ est un polynôme unitaire de degré k en d. Les polynômes d'inconnue d : $d_k(k \in [|0,p|]$ forment donc pour tout entier naturel p, une famille libre, donc une base de $\mathbb{R}_p[d]$ puisque $\dim \mathbb{R}_p[d] = p+1$. Pour tout entier naturel p non nul, il existe donc des réels non nuls tels que $d^p = \sum_{k=0}^{p} a_{k,p}(d)_k$. Comme d_p est unitaire, on a $a_{p,p} = 1$.
   On effectue donc successivement les opérations sur les lignes :
   $L_i \leftarrow L_i + \sum_{j=1}^{i-1} a_{j-1,i-1} L_j$, pour $i = n, n-1, \cdots, 2$.
   Ces opérations ne changent pas le déterminant.
   On obtient alors le déterminant de Vandermonde $V(d_1, \cdots, d_{n-1})$.Donc :
   $$D(d_1, \ldots, d_n) = V(d_1, \ldots, d_n).$$

2. On suppose sans doute que $d_1, \ldots, d_n$ sont des entiers naturels, et d'après la suite de l'énoncé, on suppose qu'ils sont supérieurs ou égaux à n (sinon, il y aurait des problèmes en $x = 0$.
   Pour tout entier naturel k non nul :
   $$\forall x \in I \ f_j^{(k)}(x) = a_j d_j (d_j - 1) \ldots (d_j - k + 1) x^{d_j - k}$$
   où l'on a posé $f_j(x) = a_j x^{d_j}$. On a donc pour tout entier naturel k, avec les mêmes restrictions sur x et la convention $(d)_0 = 1$:
   $$\forall x \in I \ f_j^{(k)}(x) = a_j (d_j)_k x^{d_j - k}$$
   On peut mettre $x^{d_j - k}$ en facteur dans la $k+1$éme ligne, et a_j dans la $j$ème colonne. Par linéarité sur les lignes et les colonnes, on obtient donc :
   $$W(f_1, \ldots, f_n) = D(d_1, \ldots, d_n) x^{d_1 + \ldots + d_n - \sum_{k=0}^{n-1} k} \prod_{i=1}^{n} a_i.$$
   Soit :
   $$W(f_1, \ldots, f_n) = V(d_1, \ldots, d_n) x^{d_1 + \ldots + d_n - \binom{n}{2}} \prod_{i=1}^{n} a_i.$$

3. D'après le théorème (et la formule) de Leibniz, pour tout entier naturel $k \in [|0, n-1|]$, et tout $j \in [|1, n|]$:$(f_j g)$ est k fois dérivable et
   $$(f_j g)^{(k)} = \sum_{i=0}^{n} \binom{k}{i} f^{(i)} g^{(k-i)}.$$
   On effectue donc, dans le déterminant définissant $W_n(f_1 g, \cdots, f_n g)$ les opérations :
   $$L_i \leftarrow L_k - \sum_{i=1}^{k-1} \binom{k-1}{i-1} g^{(k-i)}(x) L_i,$$

successivement pour $k = 2, 3, \cdots, n$. On obtient alors :

$$\forall x \in I W_n(f_1 g, \ldots, f_n g)(x) = \begin{vmatrix} g f_1(x) & g f_2(x) & \cdots & g f_n(x) \\ g(x) f_1'(x) & g(x) f_2(x) & \cdots & g(x) f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g(x) f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) g(x) & \cdots & g(x) f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

Et par n linéarité par rapport aux colonnes, on a :

$$W_n(f_1 g, \ldots, f_n g) = g^n W_n(f_1, \ldots, f_n).$$

4. Appliquant le résultat précédent aux fonctions : $x \mapsto 1, \frac{f_2}{f_1}, \cdots, \frac{f_n}{f_1}$, la fonction f_1 jouant alors le rôle de g, on obtient :

$$W(f_1, \cdots, f_n) = f_1^n W_n\left(1, \frac{f_2}{f_1}, \cdots, \frac{f_n}{f_1}\right).$$

La première colonne de ce dernier déterminant est $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0. \end{pmatrix}$.

En développant par rapport à la première colonne, on obtient alors bien :

$$W_n(f_1, \cdots, f_n) = f_1^n W_{n-1}\left(\left(\frac{f_2}{f_1}\right)', \cdots, \left(\frac{f_n}{f_1}\right)'\right)$$

En effet :

$$\left(\left(\frac{f_j}{f_1}\right)'\right)^{(k)} = \left(\left(\frac{f_j}{f_1}\right)\right)^{(k+1)}$$

B Annulation du Wronskien

Il serait plus correct de noter $\mathscr{D}^n(I, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions de I dans $\mathbb{R}$ qui n fois dérivables.

5. Il existe des réels $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ non tous nuls tels que :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i = 0.$$

Par linéarité de la dérivation, on a donc :

$$\forall k \in [|0, n-1|] \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i^{(k)} = 0.$$

Et donc, si l'on appelle $C_1(x), \cdots, C_n(x)$ les colonnes de la matrice définissant le Wronskien $W_n(f_1, \cdots, f_n)(x)$:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i C_i = 0.$$

Et donc :

$$\forall x \in I\ W(f_1, \cdots, f_n)(x) = 0.$$

6. On a alors $\left(\frac{f_1}{f_2}\right)' = \frac{f_1' f_2 - f_2' f_1}{f_2^2}$. Donc $\frac{f_1}{f_2}$ est constant. D'où le résultat.
7. Soit $c \in]a, b[$ (Donc $c \in \mathbb{R}$.) On définit $f_1, f_2 : I \to \mathbb{R}$ par :

$$f_1\ : \begin{cases} t \in]a, c] \mapsto 0 \\ t \in]c, b[\mapsto (t-c)^n \end{cases} , f_2 \begin{cases} t \in]a, c] \mapsto (t-c)^n \\ t \in]a, b[\mapsto 0 \end{cases} .$$

f_1 et f_2 sont évidemment continues sur $]a,b[$.
On voit que f_1 et (f_2 sont de classe C^{n-1} sur $]a,c[$ et $]c,b[$, les dérivées successives ayant une limite nulle à droite et à gauche en c. Plus précisément, pour $k \in [|0,n-1|]$:

$$f_1^{(k)} : \begin{cases} t \in]a,c] \mapsto 0 \\ t \in]c,b[\mapsto \frac{n!}{(n-k)!}(t-c)^{n-k} \end{cases}, \ f_2 \begin{cases} t \in]a,c] \mapsto \frac{n!}{(n-k)!}(t-c)^{n-k} \\ t \in]a,b[\mapsto 0 \end{cases}.$$

En appliquant le théorème de la limite de la dérivée successivement à $f_1, f_1', \cdots, f^{(n-2)}$, on voit que f_1 est de classe $C^{(n-1)}$ sur $]a,b[$, et que les dérivées successives de f_1 jusqu'à l'ordre $n-1$ sont nulles en c. La même propriété est vraie pour f_2.
On a donc $W_2(f_1,f_2)=0$. Par contre, la famille (f_1,f_2) est libre. En effet, soit une combinaison linéaire nulle de (f_1,f_2). On a alors $\alpha f_1 + \beta f_2 = 0$, c'est à dire :

$$\forall x \in]a,b[\ \alpha f_1(x) + \beta f_2(x) = 0.$$

En prenant $y<c$, puis $z>c$, on obtient : $\begin{cases} \beta(y-c)^n = 0 \\ \alpha(z-c)^n = 0 \end{cases}$, donc

$$\alpha = \beta = 0.$$

8. Montrons la propriété par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, avec $n \geqslant 2$ (avec la précision que J est un intervalle ouvert non vide, ou alors, ce qui revient au même du point de vue du résultat, que J est un intervalle ayant au moins deux éléments, sinon la question serait triviale).
Soient deux fonctions f_1 et f_2 dérivables de I dans $\mathbb{R}$, telles que $W_2(f_1,f_2)=0$, c'est-à-dire $f_1'f_2 - f_1f_2' = 0$. Si f_1 est nulle, la famille (f_1,f_2) est liée. Sinon, il existe $c \in]a,b[$ tel que $f_1(c) \neq 0$. Comme f_1 est continue puisque dérivable, il existe $\epsilon > 0$ tel que f_1 ne s'annule pas sur $J =]c-\epsilon, c+\epsilon[$. La restriction de $\frac{f_2}{f_1}$ est alors définie et dérivable sur J, et

$$\left(\frac{f_2}{f_1}\right)' = \frac{f_1'f_2 - f_1f_2'}{f_1^2} = 0.$$

Donc $\frac{f_1}{f_2}$ est constante sur J, et donc $((f_1)_J, (f_2)_J)$ est liée.
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$. Supposons la propriété vraie à l'ordre $n-1$. Soient $(f_1,\cdots,f_n)$ des fonctions $n-1$ fois dérivables sur un intervalle $I =]a,b[$, $a<b$. telles que $W_n(f_1,\cdots,f_n) = 0$. Si $f_1 = 0$, alors la famille $(f_1,\cdots,f_n)$ est liée. Sinon, en reprenant le même fil que ci-dessus : Sinon, il existe $c \in]a,b[$ tel que $f_1(c) \neq 0$. Comme f_1 est continue puisque dérivable, il existe $\epsilon > 0$ tel que f_1 ne s'annule pas sur $J =]c-\epsilon, c+\epsilon[$. Sur l'intervalle J, on obtient alors :

$$W(f_1,\cdots,f_n) = 0 = f_1^n W_{n-1}\left(\left[\frac{f_2}{f_1}\right)', \cdots, \left(\frac{f_n}{f_1}\right)'\right).$$

D'après l'hypothèse de récurrence (puisque les fonctions $\left[\frac{f_2}{f_1}\right)', \cdots, \left(\frac{f_n}{f_1}\right)'$ sont $n-2$ fois dérivables sur K, , il existe un intervalle ouvert non vide $K \subset J$ tel que les restrictions à K de $\left(\frac{f_2}{f_1}\right)', \cdots, \left(\frac{f_n}{f_1}\right)'$ à K forment une famille liée :

$$\exists (\alpha_2,\cdots,\alpha_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{(0,\cdots,0\}, \forall x \in K \alpha_2 \left(\frac{f_2}{f_1}\right)'(x) + \cdots + \alpha_n \left(\frac{f_n}{f_1}\right)'(x) = 0$$

.
On obtient alors :

$$\exists \alpha_1 \in \mathbb{R} \forall x \in K \alpha_2 \left(\frac{f_2}{f_1}\right)(x) + \cdots + \alpha_n \left(\frac{f_n}{f_1}\right)(x) = \alpha_1.$$

Et donc sur $K \subset I$:

$$\alpha_1 f_1 - \sum_{k=2}^{n} \alpha_k f_k = 0,$$

ce qui termine la récurrence puisque le n-uplet $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ est non nul.

9. Précisons d'abord le sens de l'égalité demandée. On doit montrer qu'il existe une matrice inversible A d'ordre n telle que pour tout $x \in I$:

$$(f_1(x), \dots, f_n(x))A = (g_1(x), \dots, g_n(x)).$$

Remarquons aussi que d'après les hypothèses, l'intervalle I étant ouvert, les fonctions $f_1, \cdots, f_n$ sont de classe $\mathscr{C}^\infty$. (Au sens mathématique usuel).

Examinons le cas $n = 2$. Les fonctions f_1, f_2 sont non identiquement nulles (elles forment une famille libre), et coïncident avec leurs développements en série , donc leurs développements en série entière n'ont pas leurs coefficients tous nuls, et leur ordre existe bien. Si ces ordres sont différents, alors $A = I_2$ convient. Sinon, soit q leur ordre commun :

$$\forall x \in I f_1(x) = \sum_{s=q}^{+\infty} a_s x^s, f_2(x) = \sum_{s=q}^{+\infty} b_s x^s, a_q \neq 0,\ b_q \neq 0.$$

Alors $g_2 = b_q f_1 - a_q f_2$ est développable en série entière, non nulle (puisque (f_1, f_2) est libre), et d'ordre strictement supérieur à q. On pose $g_1 = f_1$, et donc $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b_q & -a_q \end{pmatrix}$.. A est inversible et l'on a bien :

$$(f_1, f_2)A = (g_1, g_2).$$

De plus, l'ordre de g_2 est strictement supérieur à l'ordre de g_1, donc différent.

Soit la propriété de l'énoncé avec la condition supplémentaire que le minimum des ordres de $g_1, \dots, g_n$ est égal au minimum des ordres de $f_1, \dots, f_n$.

D'après la démonstration précédente, la propriété est vraie à l'ordre 2. Supposons la propriété vraie à l'ordre $n \geqslant 2$. Soit $(n+1)$ fonctions non nulles $f_1, \cdots, f_{n+1}$ développables en série entière au voisinage de 0, d'ordre non nul, formant une famille libre. On commence par choisir une fonction d'ordre minimal que l'on permute avec f_1. Cela revient à multiplier $(f_1, \cdots, f_{n+1})$ à droite par la matrice de permutation P d'ordre $n+1$ obtenue à partir de la matrice identité I_{n+1} en permutant les lignes d'indice i et 1 (on garde I_{n+1} si $i = 1$). Appelons $d_1, \cdots, d_{n+1}$ les ordres respectifs des nouvelles fonctions $h_1, \dots, h_{n+1}$ (qui forment encore une famille libre.), et $a_1, \cdots, a_{n+1}$. les coefficients (non nuls) des termes respectifs de plus bas degré de ces fonctions.

On procède par "élimination gaussienne" sur les développements en série entière : Pour $i \in [|2, n|]$, on effectue $h_i(x) \leftarrow h_i(x) - \frac{a_i}{a_1} h_1(x)$. Ceci revient à multiplier $(h_1(x), \dots, h_{n+1}(x))$ à droite par la matrice B obtenue à partir de la matrice identité I_{n+1}. par les mêmes opérations (cette matrice est inversible puisque ses éléments diagonaux sont des 1. Le rang de la famille obtenue est égal au rang de la famille initiale, ces opérations ne modifiant pas le rang. La nouvelle famille $(h_1, \dots, h_{n+1})$ est donc libre, donc également la nouvelle famille $(h_2, \dots, h_{n+1})$. De plus, les ordres de $h_2, \dots, h_{n+1}$ sont tous strictement supérieurs à l'ordre de h_1.

Enfin, les nouvelles fonctions sont développables en série entière au voisinage de 0 et coïncident avec leur somme sur I. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe une matrice carrée C inversible d'ordre n, et des fonctions développables en série entière $g_2, \dots, g_{n+1}$ d'ordres deux à deux distincts, le minimum des ordres étant le même que le minimum des ordres de $h_2, \dots, h_{n+1}$, telle que :

$$(h_2, \dots, h_{n+1})C = (g_2, \dots, g_{n+1}).$$

Si l'on pose $g_1 = h_1$ et si l'on considère la matrice par blocs d'ordre $(n+1)$:

$$D = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0_{1,n} \\ \hline 0_{n,1} & C \end{array}\right),$$

alors :

$$(h_1, \dots, h_{n+1})D = (g_1, \dots, g_{n+1}).$$

De plus $\det(D) = \det(C) \neq 0$. Donc D est inversible.

Les ordres $g_1, \dots, g_{n+1}$ sont deux à deux distincts. Si l'on pose alors $A = PBD$, on obtient :

$$(f_1, \dots, f_{n+1})A = (g_1, \dots, g_{n+1}.$$

Ceci termine la récurrence.

10. On peut écrire, pour tout $i \in [|1,n|]$,

$$g_i(x) = a_i x^{d_i} + h_i(x),$$

où h_i est indéfiniment dérivable et $h_i(x) = o_0(x^{d_i})$. (et $a_i \neq 0$.) On a alors pour tout $(i,k) \in [|1,n|]^2$:

$$g_i^{(k-1)}(x) = a_i (d_i)_{k-1} x^{d_i-k+1} + h_i^{(k-1)}(x).$$

D'après son développement en série entière, au voisinage de 0 :

$$h_i^{(k-1)}(x) = x^{d_i-k+1} u_{i,k}(x),$$

où

$$u_{i,k}(x) = o_0(1).$$

Donc :

$$\forall (i,k) \in [|1,n|]^2 \;\; g_i^{(k-1)}(x) = a_i x^{d_i-k+1}((d_i)_{k-1} + o_0(1)).$$

Deux rédactions possibles :

(a) En MP ou PSI, on pourrait rédiger de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
W_n(g_1,\cdots,g_n)(x) &= \sum_{\sigma\in S_n} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} \left(\prod_{i\in[|1,n|]} g_i^{(\sigma(i)-1)}(x) \right) \\
&= \sum_{\sigma\in S_n} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} \left(\prod_{i\in[|1,n|]} x^{d_i-\sigma(i)+1}((d_i)_{k-1} + o_0(1)) \right) \\
&= \sum_{\sigma\in S_n} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} \left(\left(\prod_{i\in[|1,n|]} x^{d_i-\sigma(i)+1}((d_i)_{k-1} \right) + 0(1) \right) \quad (1)
\end{aligned}$$

Au total, le déterminant s'écrira $Cx^{d_1+\cdots+d_n-\binom{n}{2}}(1+0(1))$. Il reste à montrer que C est non nul. Or, $Cx^{d_1+\cdots+d_n-\binom{n}{2}}$ est le déterminant obtenu en ne gardant que le terme $a_i x^{d_i-k+1}((d_i)_{k-1}$ dans $g_i^{(k)}(x)$.

$$Cx^{d_1+\cdots+d_n-\binom{n}{2}}) = \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right) W_n(x \mapsto x^{d_1}, \cdots, x \mapsto x^{d_n})$$

$$W_n(g_1,\cdots,g_n)(x) = \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right) W_n(x \mapsto x^{d_1}, \cdots, x \mapsto x^{d_n})(1+o(1))$$

au voisinage de 0.

Donc , d'après la question 2 :

$$C = V(d_1,\cdots,d_n)\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right) \neq 0.$$

(Puisque les d_i sont deux à deux distincts)

D'où :

$$W_n(g_1,\cdots,g_n) = D(d_1,\cdots,d_n)\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right) x^{d_1+\cdots+d_n-\binom{n}{2}}(1+0(1)).$$

(b) Pour montrer cette question avec les outils de PC, il faut faire une récurrence sur n. La propriété est vraie au rang $n = 2$. En effet, si f_1 et f_2 sont deux fonctions développables en série entière, avec des ordres distincts et supérieurs ou égaux à 1, on a, en reprenant les notations ci-dessus :

$$W_n(g_1,g_2) = a_1 x^{d_1}(1+O(1)) d_2 a_2 x^{d_2-1}(1+O(1)) - a_1 d_1 x^{d_1-1}(1+O(1)) a_2 x^{d_2}(1+O(1)).$$

Soit :

$$W_n(g_1,g_2)=a_1a_2(d_2-d_1)x^{d_1+d_2-1}(1+O(1))=a_1a_2D(d_1,d_2)x^{d_1+d_2-\binom{2}{2}}(1+0(1).$$

La formule à montrer est vraie à l'ordre 2. Soit $n_i n\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$. Supposons la propriété varia à l'ordre n, pour tout $n-uplet$ de fonctions développables en série entière d'ordres supérieurs ou égaux à $n-1$.
Soient $g_1,\cdots,g_{n+1}$ des fonctions développables en série entière au voisinage de 0 et d'ordres 2 à 2 distincts supérieurs ou égaux à n. Alors ,on peut écrire, en développant $W_{n+1}(g_1,\cdots,g_{n+1})$ par rapport à la dernière ligne :

$$W_{n+1}(g_1,\cdots,g_n)(x)=\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{n+1+i}g_i^{(n)}(x)W_n(g_1(x),\cdots,\hat{g}_i(x),\cdots g_{n+1}(x)).$$

La notation $\hat{g}_i(x)$ signifie que l'on omet $g_i(x)$ dans les arguments, y compris si $i=1$ ou $i=n+1$.
D'après l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned}
&W_{n+1}(g_1,\cdots,g_{n+1})(x)\\
&=\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{n+1+i}(d_i)_n(x^{d_i-n})a_i\left(\prod_{j\in[|1,n+1|],j\neq i}a_j\right)D(d_1,\dots,\widehat{d_i},\dots,d_{n+1})x^{\left(\sum_{j\in[|1,n+1|],j\neq i}d_j\right)-\binom{n}{2}}(1+O(1))\\
&=\left(\prod_{j=1}^{n+1}a_j\right)\left(\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{n+1-i}(d_i)_nD(d_1,\dots,\widehat{d_i},\dots,d_{n+1})\right)x^{\left(\sum_{j=1}^{n+1}d_j\right)-\binom{n+1}{2}}(1+0(1))\\
&=\left(\prod_{j=1}^{n+1}a_j\right)D(d_1,\dots,d_{n+1})x^{\left(\sum_{j=1}^{n+1}d_j\right)-\binom{n+1}{2}}(1+0(1)). \quad (2)
\end{aligned}$$

Ce qui termine la récurrence.
En effet $D(d_1,\dots,d_{n+1})=V(d_1,\dots,d_{n+1})\neq 0$, puisque le déterminant de Vandermonde est nul si et seulement si deux des d_i sont égaux.

11. Soit $a\in\mathbb{N}$ tel que $\forall i\in[|1,n|]d_i+a\geqslant n-1$. Les fonctions $gg_1\cdots,gg_n$ satisfont aux mêmes hypothèses que $g_1,\cdots,g_n$: elles sont développables en série entière avec des ordres $a+d_i$ deux à deux distincts, cette fois-ci tous supérieurs ou égaux à $n-1$. On a alors au voisinage de 0 :

$$W_n(gg_1,\cdots,gg_n)(x)=V(d_1+a,\cdots,d_n+a)\left(\prod_{i=1}^n a_i\right)x^{d_1+\cdots+d_n+na-\binom{n}{2}}(1+0(1)).$$

Or d'après la question 3 :

$$W_n(gg_1,\cdots,gg_n)(x)=g^n(x)W_n(g_1,\cdots,g_n)(x)=x^naW_n(g_1,\cdots,g_n)(x).$$

Et donc, on obtient :

$$W_n(g_1,\cdots,g_n)(x)=V(d_1+a,\cdots,d_n+a)\left(\prod_{i=1}^n a_i\right)x^{d_1+\cdots+d_n-\binom{n}{2}}(1+0(1))$$

Or

$$V(d_1+a,\cdots,d_n+a)=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(d_j+a-(d_i+a))=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(d_j-d_i)=V(d_1,\cdots,d_n).$$

Donc, on a à nouveau :

$$W_n(g_1,\cdots,g_n)=V(d_1,\cdots,d_n)\left(\prod_{i=1}^n a_i\right)x^{d_1+\cdots+d_n-\binom{n}{2}}(1+0(1)).$$

12. D'après l'expression précédente, $w_n(g_1,\cdots,g_n)$ est non nulle au voisinage de 0. Or, par linéarité de la dérivation, on a pour tout entier k, $0 \leqslant k \leqslant n-1$:

$$(f_1^{(k)}(x),\ldots,f_n^{[k)}(x))A = (g_1^{(k)}(x),\ldots,g_n^{(k)}(x)).$$

Donc :

$$\begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} g_1(x) & g_2(x) & \cdots & g_n(x) \\ g_1'(x) & g_2'(x) & \cdots & g_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_1^{(n-1)}(x) & g_2^{(n-1)}(x) & \cdots & g_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}.$$

Donc

$$W_n(f_1,\cdots,f_n)\det(A) = W_n(g_1,\ldots,g_n).$$

Comme $\det(A) \neq 0$ (puisque A est inversible), la wronskienne $W_n(f_1,\cdots,f_n)$ est donc non nulle au voisinage de 0. Remarque $A \in GL_n(\mathbb{R})$. On ne voit pas, sinon en lisant la suite, la nécessité de $\mathbb{C}$.

C Problème de Waring sur $\mathbb{C}[X]$

Ici, le corps devient $\mathbb{C}$, alors qu'auparavant, c'était $\mathbb{R}$. Il va falloir adapter les résultats précédents si on veut les utiliser. Il y a là une incohérence.

13. Δ est un endomorphisme de $\mathbb{C}[X]$, et si P est un polynôme non constant, $\deg\Delta(P) = \deg(P)-1$.Ces deux propriétés forment un exercice classique. On montre alors par un récurrence immédiate que si P est un polynôme de degré n, et k un entier naturel compris entre 0 et n :

$$\deg\Delta^k(P) = \deg(P) - k.$$

En particulier :

$$\deg(\Delta^{n-1}(X^n)) = 1.$$

Ceci répond à la première partie de la question. (On imagine que dans l'énoncé, a et b sont des réels)
On exprime ensuite Δ^n :
Si T est l'application linéaire $P \mapsto P(X+1)$ dans lui-même, alors $\Delta = T - \mathrm{Id}$, où Id est l'application (linéaire) identité de $\mathbb{C}[X]$. Id commute (pour la loi $\circ$ avec T, donc :

$$\Delta^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (-1)^{n-1-k} T^k.$$

Or T^k est le polynôme $P(X+k)$. Donc :

$$\Delta^{n-1}(P)(X) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (-1)^{n-1-k} P(X+k).$$

Et en particulier, avec tous les abus de notation :

$$\Delta^{n-1}(X^n) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (-1)^{n-1-k} (X+k)^n = aX+b.$$

Ceci est valable pour toute valeur de X. En particulier, en posant $Y = aX+b$, comme $a \neq 0$, Y peut prendre toute valeur complexe, on obtient donc :

$$\forall Y \in \mathbb{C} \ \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-1-k} \binom{n-1}{k} \left(\frac{Y-b}{a} + k\right)^n = Y$$

L'égalité précédente peut être considérée comme une égalité polynômiale. Si l'on pose, pour $k \in [|1,n|]$:

$$f_k(Y) = \omega_k \left(\frac{Y-b}{a} + k - 1\right)$$

où ω_k est une racine $n$ième de $(-1)^{n-k}\binom{n-1}{k-1}$, on obtient donc bien :

$$Y = f_1^n(Y) + \cdots + f_n^n(Y).$$

Le problème de Waring admet donc des solutions, et $k(n) \leqslant n$.

14. Supposons que : $X = \sum_{j=1}^{k(n)} f_i^n(X)$. Ceci étant valable pour toute valeur de X, on obtient alors :

$$\forall X \in \mathbb{C} \;\; g(X) = \sum_{j=1}^{k(n)} f_i^n(g(X)).$$

La composée de deux fonctions polynômes est une fonction polynôme. En posant : $g_i = f_i \circ g$, on obtient donc :

$$g(X) = g_1^n(X) + \cdots + g_{k(n)}^n(X),$$

où $g_1, \cdots, g_n$ sont des fonctions polynômes.

15. D'après la question 13 : $k(2) \leqslant 2$. Si l'on avait $k(2) = 1$, il existerait un polynôme $f_1(X)$ tel que $f_1(X)^2 = X$. On aurait alors $2\deg(f_1) = \deg(X) = 1$,ce qui est impossible, donc $k(2) = 2$.

16. On déborde le cadre initial de définition du Wronskien, qui était défini pour des fonctions de variables réelles à valeurs réelles. Ici, la seule dérivation que l'on connaisse pour des polynômes quelconques de variable complexe est la dérivation formelle.
Par linéarité de la dérivation, et la n-linéarité d'une matrice carrée d'ordre n par rapport à ses colonnes, le wronskien est n-linéaire (et bien sûr) alterné en ses arguments. On a donc :

$$W_{k(n)}(f_1^n, \ldots, f_{k(n)}^n) = W_{k(n)}(f_1^n + \cdots + f_{k(n)}^n, f_2^n, \ldots, f_{k(n)}^n) = W_{k(n)}(X, f_2^n, \ldots, f_{k(n)}^n.$$

Z_1 est un polynôme, puisque tous les termes du déterminant le définissant sont des polynômes.
Si Z_1 était le polynôme nul, Z_2 le serait également.
On peut imaginer qu'il faut utiliser les résultats de la première partie, mais ce résultats ont été a priori établis pour des fonctions de variable réelle à valeur réelle. Pour rester dans la limite du programme, on peut supposer qu'on les a établis pour des fonctions de variable réelle à valeurs complexes (et si l'on regarde en détail les démonstrations, elles conviennent encore, entout cas pour les polynômes).
Si Z_2 était le polynôme nul, il existerait un intervalle réel J non vide et non réduit à un singleton, tel que les restrictions de $X, f_2^n, \ldots, f_{k(n)}^n$. à J forment une famille liée : il existerait des complexes $\alpha, \alpha_2, \cdots \alpha_n$ non tous nuls tels que :

$$\forall x \in J \;\; \alpha x + \sum_{k=2}^{k(n)} \alpha_k f_k^n(x) = 0$$

. Un polynôme nul pour une infinité de valeurs étant nul, on en déduirait que

$$\alpha X + \sum_{k=2}^{k(n)} \alpha_k f_k^n(x) = 0.$$

Si $\alpha \neq 0$, et si ω_k est une racine n-ème de $-\frac{\alpha_k}{\alpha}$, pour $k = 2, \ldots, k(n)$, on obtiendrait alors :

$$X = \sum_{k=2}^{k(n)} (\omega_k f_k)^n,$$

ce qui contredirait la définition de $k(n)$. (Puisqu'on aurait trouvé une solution avec un nombre de termes inférieur).
Si $\alpha = 0$, la famille $f_2^n, \cdots, f_{k(n)}^n$ est liée, il existe donc un de ses éléments qui s'exprime comme combinaison linéaire des autres, et à nouveau, ceci contredirait la minimalité de $k(n)$. $Z_2 = Z_1$ n'est donc pas le polynôme nul.

17. Montrons de façon plus générale que si Q est un polynôme , divisible au sens des polynômes par P^n, P étant un polynôme et n un entier naturel non nul , Q' est divisible par P^{n-1}. Il existe un polynôme R tel que $Q = RP^n$. On a alors

$$Q' = R'P^n + nRP'P^{n-1} = P^{n-1}(R'P + nR).$$

Comme $R'P + nR$ est un polynôme , on obtient bien que P^{n-1} divise Q'. Par une récurrence triviale, on obtient alors que pour tout entier naturel $k \leqslant n$, P^{n-k} divise $Q^{(k)}$ Par conséquent , on peut mettre en facteur $f_i^{n-k(n)+1}$ (rappel : $k(n) < n+1$) dans la $i$ème colonne de Z_1, le facteur restant étant un polynôme. On obtient donc :$Z_1 = \prod_{i=1}^{k(n)} f_i^{n-k(n)+1} D$, où D est un déterminant dont les coefficients sont des polynômes, donc est un polynôme.
Donc Z_1 est divisible par $\prod_{i=1}^{k(n)} f_i^{n-k(n)+1}$.

18. Dans le déterminant définissant Z_2, la première colonne est $\begin{pmatrix} X \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. On effectue l'opération sur les lignes $L_1 - XL_2 \to L_1$, qui transforme la première colonne en $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. La première ligne du déterminant devient alors $(0, f_2^n - nXf_2'f_2^{n-1}, \cdots, f_{k(n)}^n - nXf_{k(n)}'f_{k(n)}^{n-1})$ On a $\deg(f_i^n - nXf_i'f_i^{n-1}) \leqslant n \deg f_i$. D'autre part, pour $k \leqslant 2$, on a : $\deg((f_i^n)^{(k)}) = n \deg f_i - k$.
Le polynôme Z_2 est le cofacteur de 1 dans le développement. C'est une somme de produits de $k(n)-1$ termes pris sur des lignes et des colonnes différentes (la deuxième ligne et la première colonne exclues), donc de degré au plus

$$1 + n\left(\sum_{i=2}^{k(n)} \deg(f_i)\right) - (1+2+\cdots k(n)-1) = 1 + n\left(\sum_{i=2}^{k(n)} \deg(f_i)\right) - \frac{k(n)(k(n)-1)}{2}.$$

On obtient donc l'inégalité demandée :

$$\deg(Z_2) \leqslant 1 + n\left(\sum_{i=2}^{k(n)} \deg(f_i)\right) - \frac{k(n)(k(n)-1)}{2}.$$

19. D'après la question 17, on a d'autre part, comme Z_2 n'est pas le polynôme nul :

$$\deg(Z_2) \geqslant \deg \prod_{i=1}^{k(n)} f_i^{n-k(n)+1} = (n-k(n)+1) \sum_{i=1}^{k(n)} \deg(f_i).$$

Donc :

$$(n-k(n)+1) \sum_{i=1}^{k(n)} \deg(f_i) \leqslant 1 + n\left(\sum_{i=2}^{k(n)} \deg(f_i)\right) - \frac{k(n)(k(n)-1)}{2}.$$

D'où l'inégalité demandée en gardant le terme $n\deg(f_1)$ dans le premier membre.

20. Les polynômes $f_1, \ldots, f_n$ jouent le même rôle. On a donc , pour tout $i \in [|1, k(n)|]$:

$$n \deg f_i \leqslant (k(n)-1) \sum_{i=1}^{k(n)} \deg f_i - \frac{k(n)(k(n)-1)}{2} + 1.$$

Si l'on prend f_i de degré maximal, donc non nul (puisque $X = \sum_{i=1}^{k(n)} f_i^n$.), on obtient :

$$\begin{aligned} n\deg(f_i) &\leqslant (k(n)-1) \sum_{i=1}^{k(n)} \deg f_i - \frac{k(n)(k(n)-1)}{2} + 1 \\ &\leqslant k(n)(k(n)-1)\deg(f_i) - \frac{k(n)(k(n)-1)}{2} + 1 \leqslant k(n)(k(n)-1)\deg(f_i) \end{aligned}$$

En effet $k(n) \geqslant 2$, donc $\frac{k(n)(k(n)-1)}{2} \geqslant 1$. On obtient donc, comme $\deg(f_i) \neq 0$:

$$n \leqslant k^2(n) - k(n).$$

Mais alors, nécessairement :

$$\frac{k^2(n) - k(n)}{2} > 1.$$

Et donc, en reprenant les calculs ci-dessus :

$$n < k^2(n) - k(n).$$