

## Exercice I

Dans cet exercice "Algorithme de décomposition primaire d'un entier" (*Informatique pour tous*), on se propose d'écrire un algorithme pour décomposer un entier en produit de nombres premiers. Les algorithmes demandés doivent être écrits en langage **Python**. On sera très attentif à la rédaction et notamment à l'indentation du code.

On définit la valuation  $p$ -adique [de  $n$ ] pour  $p$  nombre premier et  $n$  entier naturel non nul.

Si  $p$  divise  $n$ , on note  $v_p(n)$  le plus grand entier  $k$  tel que  $p^k$  divise  $n$ .

Si  $p$  ne divise pas  $n$ , on pose  $v_p(n) = 0$ .

L'entier  $v_p(n)$  s'appelle la valuation  $p$ -adique de  $n$ .

**q1** Écrire une fonction booléenne `estPremier(n)` qui prend en argument un entier naturel non nul  $n$  et qui renvoie le booléen `True` si  $n$  est premier et le booléen `False` sinon. On pourra utiliser le critère suivant : un entier  $n \geq 2$  qui n'est divisible par aucun entier  $d \geq 2$  tel que  $d^2 \leq n$ , est premier.

**q2**

En déduire une fonction `liste_premiers(n)` qui prend en argument un entier naturel non nul  $n$  et renvoie la liste des nombres premiers inférieurs ou égaux à  $n$ .

**q3** Pour calculer la valuation 2-adique de 40, on peut utiliser la méthode suivante :

- 40 est divisible par 2 et le quotient vaut 20.
- 20 est divisible par 2 et le quotient vaut 10.
- 10 est divisible par 2 et le quotient vaut 5.
- 5 n'est pas divisible par 2.

La valuation 2-adique de 40 vaut donc 3.

Écrire une fonction `valuation_p_adique(n, p)` **non récursive** qui implémente cet algorithme. Elle prend en arguments un entier naturel  $n$  non nul et un nombre premier  $p$  et renvoie la valuation  $p$ -adique de  $n$ . Par exemple, puisque  $40 = 2^3 \times 5$ , `valuation_p_adique(40, 2)` renvoie 3, `valuation_p_adique(40, 5)` renvoie 1 et `valuation_p_adique(40, 7)` renvoie 0.

**q4** Écrire une deuxième fonction cette fois-ci **récursive** `val_p_adique(n, p)` qui renvoie la valuation  $p$ -adique de  $n$ .

**q5** En déduire une fonction `decomposition_facteurs_premiers(n)` qui calcule la décomposition en facteurs premiers d'un entier  $n \geq 2$ .

Cette fonction doit renvoyer la liste des couples  $(p, v_p(n))$  pour tous les nombres premiers  $p$  qui divisent  $n$ .

Par exemple, `decomposition_facteurs_premiers(40)` renvoie la liste `[[2, 3], [5, 1]]`.