PARTIE 2

Question 15 f est un endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ tel que son polynôme caractéristique soit :
$\chi_f = (X-a)(X-b)(X-c)$, a,b,c étant trois nombres complexes. I_d est l'endomorphisme identité de $\mathbb{C}^3$.

A) f est toujours diagonalisable

B) f n'est pas toujours diagonalisable

C) On a toujours $Ker(f-aI_d)+Ker(f-bI_d)+Ker(f-cI_d)=\mathbb{C}^3$

D) Si les trois nombres complexes a,b,c, sont tous distincts, alors :
$(f-aI_d)\circ(f-bI_d)\circ(f-cI_d)=0_{L(\mathbb{C}^3)}$

Question 16 A est une matrice de $M_n(\mathbb{R}), n>0$, de polynôme caractéristique χ_A, alors :

A) χ_A est toujours scindé dans $\mathbb{R}[X]$

B) χ_A est toujours scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$

C) χ_A est toujours irréductible dans $\mathbb{C}[X]$

D) Si $n=3$, A a toujours au moins une valeur propre réelle

Question 17 Soit A une matrice de $M_3(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ alors :

A) A est diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$

B) A est semblable a une matrice triangulaire inférieure

C) A est semblable à la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

D) Le produit des valeurs propres est égal au produit des termes diagonaux de la matrice A

Question 18 Soit B une matrice de $M_3(\mathbb{C})$,b un nombre complexe : $B = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ b & 0 & i \end{pmatrix}$ alors :

A) Si $b=0$, alors B est diagonalisable car toute matrice symétrique est diagonalisable

B) Quel que soit b, B est semblable a une matrice triangulaire inférieure

C) Quel que soit b, le polynôme caractéristique admet deux racines complexes conjuguées

D) Quel que soit b, l'espace propre associé à la valeur propre i est de dimension 2

Question 19 Soit le système d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$.

$$\begin{cases} 0= & x+y+z \\ 0= & x^2+y^2+z^2 \\ 0= & x^3+y^3+z^3 \end{cases}$$

alors on peut dire que :

A) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ appartient au noyau de $\begin{pmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{pmatrix}$ si et seulement si $x = y = z = 0$

B) Il n'existe pas $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$ pour lequel la matrice $\begin{pmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{pmatrix}$ est inversible

C) Ce système n'a aucune solution telle que $x \neq y$.

D) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix} = 0$ si et seulement si $x = y$

Question 20 Soit M une matrice nilpotente non nulle de $M_n(\mathbb{C})$ $(n \in \mathbb{N}\,; n > 1)$
De manière générale, on peut dire que :

A) Pour tout entier naturel p non nul, $M^p = 0_{M_n(\mathbb{C})}$

B) 0 est toujours valeur propre simple de M

C) M est de rang $n-1$

D) $\exists p \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $\forall k \geq p, M^k = 0_{M_n(\mathbb{C})}$

Question 21 a,b,c, étant trois nombres complexes, on considère la matrice de $M_3(\mathbb{C})$, $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ alors :

A) Le polynôme caractéristique de N est :

$$(X-(a+b+c))(X-\frac{2a-b-c+i\sqrt{3}(b-c)}{2})(X-\frac{2a-b-c-i\sqrt{3}(b-c)}{2})$$

B) Le polynôme caractéristique de N peut toujours s'écrire :

$$(X-(a+b+c))(X-\frac{2a-b-c+i\sqrt{3}|b-c|}{2})(X-\frac{2a-b-c-i\sqrt{3}|b-c|}{2})$$

C) N est nilpotente si et seulement si $a=b=0$

D) Pour tout entier n non nul, $\exists (a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{C}^3$ *tel que* $N^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \\ c_n & a_n & b_n \\ b_n & c_n & a_n \end{pmatrix}$

Dans les questions suivantes, nous allons étudier les matrices M de $M_n(\mathbb{C})$ telles que $n > 1$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*, k \leq n, tr(M^k) = 0$.

Question 22 Soit M une matrice **triangulaire** de $M_3(\mathbb{C})$ telle que la trace de ses puissances trM, trM^2, trM^3 soit nulle.

A) Cette matrice est nécessairement la matrice nulle

B) Au plus un de ses termes diagonaux est nul

C) Tous ses termes diagonaux sont nuls

D) $\lim\limits_{n \to +\infty} M^n = 0_{M_3(\mathbb{C})}$

Question 23 Soit M une matrice **triangulaire** de $M_4(\mathbb{C})$ telle que la trace de ses puissances trM, trM^2, trM^3, trM^4 soit nulle.

A) Cette matrice est nécessairement la matrice nulle

B) Au plus deux de ses termes diagonaux sont nuls

C) Tous ses termes diagonaux sont nuls

D) $\lim\limits_{n \to +\infty} M^n$ est la matrice nulle

Question 24 Soit M une matrice de $M_4(\mathbb{C})$ telle que la trace de ses puissances trM, trM^2, trM^3, trM^4 soit nulle.

A) Cette matrice est semblable à une matrice nilpotente

B) Au plus trois de ses termes diagonaux sont nuls

C) Tous ses termes diagonaux sont nuls

D) $\lim\limits_{n \to +\infty} M^n$ est la matrice nulle

Question 25 Soit M une matrice **triangulaire** de $M_n(\mathbb{C})$ telle que la trace de ses puissances trM, trM^2, trM^3, trM^4,....,trM^n soit nulle.

A) Cette matrice est nécessairement la matrice nulle

B) Au plus $n-1$ de ses termes diagonaux sont nuls

C) Tous ses termes diagonaux sont nuls

D) Cette matrice est semblable à une matrice nilpotente.

Question 26 Soit M une matrice de $M_n(\mathbb{C})$ telle que la trace de ses puissances trM, trM^2, trM^3, trM^4,...., trM^n soit nulle.

A) Cette matrice est nilpotente

B) Au plus $n-1$ de ses termes diagonaux sont nuls

C) Tous ses termes diagonaux sont nuls

D) Quel que soit le réel a, $I_n + aM$ est inversible

2 Partie 2.

Soit $P(X)$ un polynôme à coefficients réels de degré $n \geq 2$ et α est un réel quelconque . On définit la fonction f_α.

$$\forall P(X) \in \mathbb{R}_n[X], f_\alpha(P(X)) = X(X-1)P''(X) + (1+\alpha X)P'(X)$$

- **Question 15.**
  L'ensemble $\mathbb{R}_n[X]$.
  A) est un sous espace vectoriel de dimension n de $\mathbb{R}[X]$.
  B) ne peut être un sous espace vectoriel.
  C) admet pour base la famille $\{X^k(X-1)^{n-k}, 0 \leq k \leq n\}$
  D) admet pour base la famille $\{(X-1)^k, 0 \leq k \leq n\}$

- **Question 16.**
  La fonction f_α.
  A) n'est pas linéaire.
  B) est linéaire mais ne peut être un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
  C) est une application linéaire de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$.
  D) est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
  Dans les questions 17 à 23, on se place dans le cas où $n = 3$.

- **Question 17.**
  M_α la matrice de l'endomorphisme f_α dans la base canonique .
  A) est une matrice triangulaire inférieure de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.
  B) est une matrice symétrique réelle.
  C) est nilpotente.
  D) est une matrice carrée de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

- **Question 18.**
  Cette matrice M_α si elle existe.
  A) s'écrit : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3(2+\alpha) \end{pmatrix}$
  B) s'écrit : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\alpha) & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3(2+\alpha) \end{pmatrix}$
  C) vérifie $M_\alpha^2 = \alpha M_\alpha$
  D) est de rang 3 pour tout réel α.

- **Question 19.**
  A) Pour tout réel α,les valeurs propres de l'endomorphisme f_α sont de multiplicité 1.

  B) Si $2(1+\alpha)$ est une valeur propre de f_α, alors il faut α nécessairement différent de-1 car une valeur propre est toujours non nulle.

  C)Pour tout réel α, les valeurs propres de l'endomorphisme f_α sont : $\alpha;\ 2(1+\alpha);\ 3(2+\alpha)$.

  D)Pour tout réel α, les valeurs propres de l'endomorphisme f_α sont : $0;\ \alpha;\ 2(1+\alpha);\ 3(2+\alpha)$.

- **Question 20.**

De manière générale, pour qu'un endomorphisme u d'un espace vectoriel E soit diagonalisable, il faut et il suffit que :
A) son polynôme caractéristique soit scindé et ait toutes ses racines simples.
B) Il existe une base de vecteurs propres.
C) les sous espaces propres de u soient tous de dimension 1.
D) la somme des dimensions des sous espaces propres de u soit égale à la dimension de E.

- **Question 21.**
L'endomorphisme f_α .

A) n'est diagonalisable pour aucune valeur de α.
B) est diagonalisable pour tout α car les valeurs propres sont toutes de multiplicité 1.
C) est diagonalisable pour toute valeur de α car la matrice f_α est triangulaire .
D) est diagonalisable uniquement dans le cas où α est distinct de $0; -1; -2$ car un endomorphisme admettant 0 comme valeur propre n'est pas diagonalisable .

- **Question 22.**
L'ensemble des valeurs de α pour lesquelles l'endomorphisme f_α admet au moins une valeur propre double est :
A) vide.
B) l'ensemble $\{0; -1; -2\}$ et 0 est la seule valeur propre double possible.
C)l'ensemble $\{0; -1; -2; -3; -4\}$.
D)l'ensemble $\{-3; -4\}$ puisqu'une valeur propre est nécessairement non nulle.

- **Question 23.**
On considère N_α la matrice de f_α dans la base $\{1; 1+X; X^2+X^3; X^3\}$
A)M_α et N_α ont le même polynôme caractéristique
B) Il existe une matrice inversible Q telle que $N_\alpha = QM_\alpha Q^{-1}$
C)$N_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\alpha-1 & -3 \\ 0 & 0 & 3(2+\alpha) & 3(2+\alpha) \end{pmatrix}$
D)$M_\alpha = PN_\alpha P^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- **Question 24.**
De manière générale, pour u un endomorphisme réel d'un espace vectoriel de dimension finie E
A) u est toujours diagonalisable .
B) Si M et N sont deux matrices de u dans deux bases différentes alors M et N ont la même trace .
C) Si u est une projection alors u est diagonalisable.
D) Si u est une symétrie alors l'ensemble des valeurs propres de u est $\{1, -1\}$.

Tournez la page S.V.P.

Dans les questions 25 à 27, on reprend le cas général, $n \geq 2$. •

- **Question 25.**

A) Les valeurs propres de f_α sont $\lambda_k = k(\alpha + k - 1)$, pour k compris entre 0 et n.
B) Les valeurs propres de f_α sont $\lambda_k = (k-1)(\alpha + k - 2)$, pour k compris entre 1 et n.
C) Pour que f_α admette une valeur propre au moins double, il faut que α soit entier compris entre $-2(n-1)$ *et* 0.
D) Il n'existe pas de réel α tel que f_α admette au moins une valeur propre double.

- **Question 26.**

On désigne par $Kerf_\alpha$ le noyau de f_α et par Imf_α l'image de f_α.
A) Si α n'est pas dans l'intervalle $[1-n;0]$ alors $dimKerf_\alpha = 1$ car 0 est valeur propre simple de f_α.
B) Si α est un entier de l'intervalle $[1-n;0]$ alors $dimKerf_\alpha = 2$ puisque 0 est valeur propre double de f_α et que la dimension d'un sous espace propre est toujours égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre (dans le polynôme caractéristique)à laquelle il est associé.
C) Si α est un entier de l'intervalle $[1-n;0]$ alors $dimImf_\alpha = n+1 - dimKerf_\alpha = n-1$
D) Si α n'est pas un entier de l'intervalle $[1-n;0]$ alors $Kerf_\alpha$ est l'ensemble des polynômes constants.

- **Question 27.**

Dans cette question , $\alpha = 0$.
A) La matrice M_0 est de rang au plus égal à $n-1$ car 0 est valeur propre double.
B) La matrice M_0 est de rang n car 0 est valeur propre double.
C) L'endomorphisme f_0 est diagonalisable.
D) L'endomorphisme f_0 n'est pas diagonalisable car $Kerf_0 = Vect\{X\}$.

- **Question 28.**

On se place dans cette question dans le cas où : $n = 3$ et $\alpha = -4$.
A) L'espace propre associé à la valeur propre -4 est $Vect\{1 - 4X\}$.
B) L'espace propre associé à la valeur propre -6 est $Vect\{X^2\}$.
C) L'endomorphisme f_{-4} n'est pas diagonalisable car le sous espace propre associé à la valeur propre double -4 est de dimension 1.
D) L'endomorphisme f_{-4} est diagonalisable.