2014

Troisième partie

On note $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{P}(X)=\det(A-XI_3)$

26. On a :

A) $\mathrm{P}(X)=(X-3)(X-2)^2$

B) $\mathrm{P}(X)=(3-X)(X-2)^2$

C) $\mathrm{P}(X)=(X-3)^2(X-2)$

D) $\mathrm{P}(X)=(X-3)(X-2)(X-1)$

27. La matrice A ci-dessus est :

A) diagonalisable car son polynôme caractéristique est scindé à racines simples.

B) diagonalisable car son polynôme caractéristique est scindé et que la dimension de chaque sous-espace propre est égal à l'ordre de multiplicité de la valeur propre.

C) non diagonalisable

D) inversible

28. Si A est la matrice d'un endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$, si on pose $\varepsilon_1 = e_1 + e_2 + e_3$, $\varepsilon_2 = 4e_1 + 3e_2 + 4e_3$ et $\varepsilon_3 = -2e_1 - e_3$ on a :

A) $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

B) ε_1, ε_2 et ε_3 sont trois vecteurs propres de u.

C) $u(\varepsilon_3) = \varepsilon_2 + 2\varepsilon_3$

D) $u(\varepsilon_3) = -2\varepsilon_1 - \varepsilon_3$

On note $T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

29. On a :

A) les matrices A et T sont semblables car elles ont le même rang

B) les matrices A et T sont semblables car elles ont le même déterminant

C) les matrices A et T sont semblables car elles ont le même polynôme caractéristique

D) les matrices A et T sont semblables car elles ont la même trace.

30. Si on note $P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, on a :

A) $PAP^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

B) $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

C) $PAP^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

D) $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Tournez la page S.V.P.

On note $T=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}$, $J=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $K=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $L=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$.

On note $C(T)$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ des matrices qui commutent avec la matrice T c'est-à-dire les matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $MT=TM$.

31. On a :

A) $C(T)=\{0\}$.

B) $C(T)$ est un espace vectoriel de dimension 3 engendré par les matrices J, K et L

C) $C(T)$ est un espace vectoriel de dimension 2 engendré par les matrices K et L

D) $C(T)$ est un espace vectoriel de dimension 4

32. On admet que $C(A)$, le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ des matrices qui commutent avec la matrice A, est de dimension 3, on a alors :

A) $C(A)=\text{vect}\{J,K,L\}$

B) $C(A)=\text{vect}\{T,T^2,T^3\}$

C) $C(A)=\text{vect}\{I_3,A,A^2\}$

D) $C(A)=C(T)$

PARTIE III

n désigne un entier naturel, ln désigne la fonction logarithme népérien et e désigne la fonction exponentielle. On considère la suite (u_n) définie par pour tout n entier naturel non nul $\quad u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} 1/k\right) - \ln(n)$ Pour x réel strictement positif, on considère l'application g_x définie par $g_x(t) = (\ln(t))/(t^x)$ pour tout t appartenant à l'intervalle $I =]0,+\infty[$

33) On établit, en utilisant les notations de Landau, que

A) $u_{n+1} - u_n = (1/(2n^2)) + o(1/n^2)$

B) $u_{n+1} - u_n = (-1/(2n^2)) + o(1/n^2)$

C) la suite (u_n) converge car elle est de même nature que la série de terme général $(u_{n+1} - u_n)$ dont on montre la convergence, par application du critère des équivalents, comme série à termes positifs à partir d'un certain rang

D) la suite (u_n) diverge

34) La fonction g_x

A) est dérivable sur I et sa dérivée est définie par $g_x'(t) = 1/t^{x+1}$ pour tout t appartenant à I

B) est dérivable sur I et sa dérivée est définie par $g_x'(t) = (1-x\ln(t))/t^{x+1}$ pour tout t appartenant à I

C) est croissante sur I

D) est croissante sur $]0,e^{1/x}]$ et décroissante sur $[e^{1/x},+\infty[$

35) On pose, pour tout n entier naturel non nul $r_n = (\ln n)/n$. On déduit de la question précédente que

A) pour tout entier n supérieur ou égal à 4, $\displaystyle\int_n^{n+1} g_1(t)dt \leq r_n \leq \int_{n-1}^{n} g_1(t)dt$

B) pour tout entier n supérieur ou égal à 4, $\displaystyle\int_{n-1}^{n} g_1(t)dt \leq r_n \leq \int_{n}^{n+1} g_1(t)dt$

C) pour tout entier n supérieur ou égal à 4 on a $r_n \leq ((\ln n)^2 - (\ln(n-1))^2)/2$ et pour tout entier n supérieur ou égal à 3 on a $((\ln(n+1))^2 - (\ln n)^2)/2 \leq r_n$

D) pour tout entier n supérieur ou égal à 4 on a $((\ln n)^2 - (\ln(n-1))^2)/2 \leq r_n \leq ((\ln(n+1))^2 - (\ln n)^2)/2$

36) La série de terme général $(-1)^n r_n$, n entier naturel non nul

A) est divergente

B) est une série alternée absolument convergente

C) est, d'après le critère spécial des séries alternées, convergente car la suite (r_n) est à termes positifs, décroissante à partir du rang 3 et de limite nulle

D) n'est pas absolument convergente car pour tout n entier supérieur ou égal à 3, r_n est minoré par $1/n$, terme général d'une série positive divergente

Tournez la page S.V.P.

37) Pour n, entier naturel non nul, on considère les fonctions v_n et w_n définies sur l'intervalle J = [1,+∞[respectivement par

$v_n(x) = (1/n^x) - (1/(n+1)^x)$ et $w_n(x) = (1/n^x) - \int_n^{n+1} (1/t^x)dt$. On a

A) pour tout entier n supérieur ou égal 3, la dérivée v_n'de v_n est négative sur J car la fonction g_x décroit sur l'intervalle $[e^{1/x},+\infty[$ puisque x est supérieur ou égal à 1

B) pour tout entier n supérieur ou égal 3, la dérivée v_n'de v_n est positive sur J car la fonction g_x croit sur l'intervalle $[e^{1/x},+\infty[$ puisque x est supérieur ou égal à 1

C) pour tout entier n supérieur ou égal 3, la fonction v_n est croissante sur J

D) pour tout entier n supérieur ou égal 3, la fonction v_n est croissante sur [1,3[et décroissante sur [3,+∞[

38) La série de fonctions de terme général v_n, n entier naturel non nul,

A) est divergente sur l'intervalle J

B) est convergente sur J mais n'est pas absolument convergente sur cet intervalle J

C) est normalement convergente sur J car pour tout n entier supérieur ou égal à 3 et pour tout x appartenant à J on a $0 \leq v_n(x) \leq v_n(1) = 1/(n(n+1))$ terme général d'une série numérique convergente

D) ne converge pas normalement sur J

39) Pour tout n entier naturel non nul, la fonction w_n

A) est continue sur]1,+∞[mais n'est pas continue sur J

B) est continue sur J car la fonction $((n+1)^u - n^u)/u$ tend vers $\ln(n+1) - \ln n$ quand u tend vers 0

C) vérifie, pour tout x appartenant à J, $0 \leq v_n(x) \leq w_n(x)$

D) vérifie, pour tout x appartenant à J, $0 \leq w_n(x) \leq v_n(x)$ car, pour x supérieur ou égal à 1, la fonction $1/t^x$ décroit sur l'intervalle $[n,n+1]$

2016

1 Partie 1.

Cet exercice a pour but d'étudier la convergence et quelques propriétés d'intégrales contenant des fonctions exponentielles.

Si $a_1, ..., a_n$ sont n réels, le produit $a_1 \times a_2 \times ... \times a_n$ se note : $\prod_{k=1}^{n} a_k$.

Si la limite $\lim_{n \to +\infty} \prod_{k=1}^{n} a_k$ existe, on la note : $\prod_{k=1}^{+\infty} a_k$.

On pourra utiliser les résultats suivants : $\dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x} = \prod_{n=1}^{+\infty}(1 - \dfrac{x^2}{n^2})$ et $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

- **Question 1.**
  L'intégrale $\int_0^1 e^{-t} t^{\alpha-1} dt$ où $\alpha \in \mathbb{R}$
  A) converge car quel que soit α réel, la fonction $f : t \to e^{-t} t^{\alpha-1}$ est continue et positive sur $[0, 1]$.
  B) ne converge pas si $\alpha < 0$.
  C) ne converge que si $\alpha < 1$.
  D) converge car au voisinage de $t = 0$, $e^{-t} t^{\alpha-1}$ est équivalent à $\dfrac{t}{2}$.

- **Question 2.**
  L'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt$. où $\alpha \in \mathbb{R}$
  A) converge car quel que soit α réel, la fonction $f : t \to e^{-t} t^{\alpha-1}$ est continue sur $[1, +\infty[$.
  B) converge car $\lim_{t \to +\infty} t^2 e^{-t} t^{\alpha-1} = 1$.
  C) converge car $\lim_{t \to +\infty} t^2 e^{-t} t^{\alpha-1} = 0$.
  D) ne converge que si $\alpha > 0$.

- **Question 3.**
  L'intégrale $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt$ converge :
  A) pour toute valeur de α.
  B) uniquement si $\alpha < 0$.
  C) uniquement si $\alpha < 1$.
  D)uniquement si $\alpha \in [0, 1]$.

- **Question 4.**
  On se place dans le cas où $\alpha > 0$ on a alors :
  A) $\alpha\Gamma(\alpha + 1) = \Gamma(\alpha)$.
  B) $\alpha\Gamma(\alpha + 1) = \Gamma(-\alpha)$.
  C) $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$.
  D) $\Gamma(\alpha + 1) = (\alpha + 1)\Gamma(\alpha)$.

- **Question 5.**
  Si n est un entier positif non nul, on a :
  A) $\Gamma(n + 1) = \dfrac{(-1)^n}{(n + 1)!}$ B) $\Gamma(n + 1) = \dfrac{1}{(n + 1)!}$
  C) $\Gamma(n + 1) = (n + 1)!$ D) $\Gamma(n + 1) = n!$

Tournez la page S.V.P.

– **Question 6.**

Si n est un entier positif non nul, on a :

A) $\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{(2n)!\pi}{2^{2n}n!}$. B) $\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{2^{2n}n!}$.

C) $\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{(2n)!n!}{2^{2n}\pi}$. D) $\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{(2n)!n!}{2^{2n}\sqrt{\pi}}$.

– **Question 7.**

On a :

A) $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-\frac{t}{n})^n = 1$. B) $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-\frac{t}{n})^n = +\infty$.

C) $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-\frac{t}{n})^n = e^t$. D) $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-\frac{t}{n})^n = e^{-t}$.

– **Question 8.**

On se place toujours dans le cas où $\alpha > 0$, on considère : $I(\alpha) = \int\limits_0^n (1-\frac{t}{n})^n t^{\alpha-1}dt$.

En effectuant le changement de variable $u = \frac{t}{n}$ et en calculant $I(\alpha)$ par intégration par parties successives, on peut en déduire :

A) $\Gamma(\alpha) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n!}{(\alpha+1)(\alpha+2)...(\alpha+n)}n^\alpha$.

B) $\Gamma(\alpha) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(n-1)!}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)...(\alpha+n-1)}n^\alpha$.

C) $\Gamma(\alpha) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)...(\alpha+n+1)}n^\alpha$.

D) $\Gamma(\alpha) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n!}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)...(\alpha+n)}n^\alpha$.

– **Question 9.**

On introduit $G(\alpha) = \frac{1}{\alpha}\lim\limits_{m\to+\infty}(m^\alpha \prod\limits_{k=1}^{m} \frac{k}{k+\alpha})$ dont on admettra l'existence pour tout réel α différent d'un entier négatif ou nul.

On peut alors écrire pour tout réel α non entier négatif ou nul :

A) $\Gamma(\alpha) = G(\alpha)$. B) $\frac{\Gamma(\alpha)}{\alpha} = G(\alpha)$.

C) $\Gamma(\alpha) = \frac{G(\alpha)}{\alpha}$. D) $\Gamma(\alpha) = G(\alpha)$ seulement si $\alpha > 0$.

- **Question 10.**
En calculant le produit $G(\alpha)G(-\alpha)$, on obtient :

A) $G(\alpha)G(-\alpha) = -\pi\alpha\dfrac{1}{cos(\pi\alpha)}$ B) $G(\alpha)G(-\alpha) = -\pi\alpha^2(1 - sin(\pi\alpha))$.

C) $G(\alpha)G(-\alpha) = \dfrac{-\pi}{\alpha\sin(\pi\alpha)}$ D) $G(\alpha)G(-\alpha) = \dfrac{-\pi}{\alpha^2}(1 - \sin(\pi\alpha))$.

- **Question 11.**
On suppose α strictement positif.On a alors :
A) $G(-\alpha)$ est définie quel que soit $\alpha > 0$.
B) $G(-\alpha)$ est définie quel que soit α entier naturel non nul.
C) $G(-\alpha)$ n'est définie que si α est différent de $p/2$, $p \in \mathbb{N}^*$.
D) $G(-\alpha)$ n'est définie que si α est différent de p, $p \in \mathbb{N}^*$.

- **Question 12.**
En calculant $G(-1,5)$ on obtient :
A) $G(-1,5) = \frac{4}{3}\sqrt{\pi}$ B) $G(-1,5) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$.

C) $G(-1,5) = \dfrac{4}{3\sqrt{\pi}}$ D)$G(-1,5) = \dfrac{3}{4\sqrt{\pi}}$.

- **Question 13.**
En calculant $G(-\frac{1}{2})$ on obtient :
A) $G(-\frac{1}{2}) = -\sqrt{\pi}$ B) $G(-\frac{1}{2}) = -2\sqrt{\pi}$.

C) $G(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ D)$G(-\frac{1}{2}) = -2\pi$.

- **Question 14.**
On se place dans le cas où $\alpha = 0$ et on note quand elle existe, la fonction F définie par :
$F(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t}t^{-1}dt$, x étant un réel tel que l'intégrale converge.
On a alors :
A) F est définie sur $\mathbb{R}$.
B) F n'est définie que sur $\mathbb{R}_+^*$.
C) F est définie sur $\mathbb{R}_+$, mais n'est de classe C^1 que sur $\mathbb{R}_+^*$.
D)F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $F'(x) = -\dfrac{e^{-x}}{x}$ car $F(x) = \int_x^A e^{-t}t^{-1}dt + K_A$, avec $A > 0$ et K_A constante.