Problème

Partie préliminaire

III.1 Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Notons $C = AB$. Pour tout $1 \leqslant i, j \leqslant n$, on a

$$|c_{ij}| = \left| \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \|A\|_\infty \|B\|_\infty = n\|A\|_\infty \|B\|_\infty.$$

On en déduit que $\|C\|_\infty \leqslant n\|A\|_\infty \|B\|_\infty$, puis que $\|C\| \leqslant \|A\|\|B\|$.

III.2 D'après le cours, dans tout espace vectoriel normé de dimension finie, la convergence absolue entraîne la convergence.

III.3 Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Comme $\|\ \|$ est une norme d'algèbre, on peut écrire pour tout $k \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \|\frac{1}{k!} M^k\| \leqslant \frac{1}{k!}\|M\|^k$ (se prouve par récurrence). La série numérique $\sum \frac{1}{k!}\|M\|^k$ converge (vers $\exp(\|M\|)$) ; d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit la convergence absolue de $\sum \frac{1}{k!} M^k$, donc sa convergence d'après la question précédente.

Première partie

III.4 Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$. Comme tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ est scindé, on en déduit que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.

Soit T une matrice triangulaire semblable à M. Il existe donc $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $M = PTP^{-1}$. On a $\exp(M) = P\exp(T)P^{-1}$ (pour tout $p \in \mathbb{N}$, on peut écrire $\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} M^k = P\left(\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} T^k\right) P^{-1}$ par linéarité, puis on passe à la limite lorsque p tend vers $+\infty$ en utilisant la continuité séquencielle de l'application $A \mapsto PAP^{-1}$, cette dernière étant continue car linéaire en dimension finie). On en déduit que $\det\exp(M) = \det\exp(T)$ car deux matrices semblables ont même déterminant. La matrice $\exp(T)$ étant triangulaire, son déterminant est le produit de ses termes diagonaux qui sont les λ_i, valeurs propres de M (en effet, deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique). Finalement,

$$\det(\exp M) = \prod_{i=1}^{n} e^{\lambda_i} = e^{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i} = e^{\operatorname{tr} M}.$$

III.5 On trouve $\det A = -12$ (confirmé par la valeur de χ_A donnée dans la page suivante. . .). S'il existait $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$, on aurait $\det(B)^2 = \det A$, et $\det A$ serait positif, ce qui n'est pas le cas. Donc il n'existe pas de telle matrice B.

D'après la question précédente, si $A = \exp M$, alors $\det A = e^{\operatorname{tr} M}$. Donc s'il existait une telle matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $\det A$ serait un réel positif, ce qui n'est pas. Une telle matrice M n'existe pas.

Deuxième partie

III.6 (a) Il suffit de choisir $f : x \mapsto \alpha x^0 3^x e^{i\pi x} + \beta x^2 2^x e^{i0x}$.

(b) On remarque que $(x+x_0)^k \rho^{x+x_0} e^{i\theta(x+x_0)} = c_0 (x+x_0)^k \rho^x e^{i\theta x}$, où $c_0 = \rho^{x_0} e^{ix_0} \in \mathbb{C}$ est une constante. En développant par le binôme de Newton la quantité $(x+x_0)^k$, on voit alors que $x \mapsto c_0(x+x_0)^k \rho^x e^{i\theta x}$ est un élément de F. Tout élément f de F étant une combinaison linéaire de fonctions du type $x \mapsto x^k \rho^x e^{i\theta x}$, ceci montre que $x \mapsto f(x+x_0)$ est encore un élément de F.

III.7 (a) Notons $u_n = n^2 (2/3)^n e^{i\theta n}$. On a $|u_n| = n^2(2/3)^n$ qui tend vers 0 par croissance comparée.

(b) Supposons dans un premier temps que $\rho_1 < \rho_2$. En divisant par ρ_2^n l'égalité $\alpha n^{k_1} \rho_1^n e^{i\theta_1 n} + \beta n^{k_2} \rho_2^n e^{i\theta_2 n} = 0$, on obtient $\alpha n^{k_1} (\rho_1/\rho_2)^n e^{i\theta_1 n} + \beta n^{k_2} e^{i\theta_2 n} = 0$. En raisonnant comme dans la question précédente, on voit que $\alpha n^{k_1}(\rho_1/\rho_2)^n e^{i\theta_1 n}$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Si $\beta \neq 0$, on aboutit à une absurdité parce que la quantité $n^{k_2} e^{i\theta_2 n}$ ne tend pas vers 0 (son module ne tend pas vers 0). Finalement, on a nécessairement $\beta = 0$, puis $\alpha = 0$.

Cas $\rho_1 = \rho_2$: on peut supposer sans restriction que $k_2 \leqslant k_1$; pour $n \neq 0$, on simplifie par ρ_1^n et on multiplie par $n^{-k_1} e^{-i\theta_1 n}$ pour obtenir $\alpha = -\beta n^{k_2 - k_1} e^{i(\theta_2 - \theta_1)n}$. Si $k_2 - k_1 < 0$, le terme de droite tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, ce qui entraîne $\alpha = 0$, puis $\beta = 0$. Si $k_2 = k_1$, supposons par l'absurde que $\beta \neq 0$. En faisant par exemple $n = 1$ et $n = 2$, on obtient que $e^{i(\theta_2 - \theta_1)} = 0$, donc $\theta_2 - \theta_1 = 0 \pmod{2\pi}$. Compte tenu des hypothèses sur θ_1 et θ_2, ceci est absurde. Finalement, $\beta = 0$, puis $\alpha = 0$.

(c) Soit $f, g \in F$ vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = g(n)$. Alors $f - g$ est un élément de F vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(f-g)(n) = 0$. D'après le résultat admis, $f = g$.

III.8 En écrivant la division euclidienne de X^n par χ_A, on obtient l'existence d'un polynôme Q_n et de trois réels a_n, b_n, c_n tels que $X^n = \chi_A Q_n + a_n X^2 + b_n X + c_n$. En évaluant en A, il vient, en utilisant le théorème de Cayley-Hamilton,

$$A^n = a_n A^2 + b_n A + c_n I_3.$$

1er cas : si A admet trois valeurs propres distinctes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, les suites $(a_n), (b_n)$ et (c_n) sont déterminées en résolvant le système de Cramer

$$\begin{cases} \lambda_1^n = a_n \lambda_1^2 + b_n \lambda_1 + c_n \\ \lambda_2^n = a_n \lambda_2^2 + b_n \lambda_2 + c_n \\ \lambda_3^n = a_n \lambda_3^2 + b_n \lambda_3 + c_n \end{cases}$$

En écrivant $\lambda_k = \rho_k e^{i\theta_k}$, on voit alors en appliquant les formules de Cramer que les coefficients de A^n sont des combinaisons linéaires d'expression du type $\rho_k^n e^{i\theta_k n}$ avec $\rho_k > 0$ car aucun des λ_k n'est nul puisque A est supposée inversible.

2e cas : si A admet une valeur propre double (disons λ_1) et une valeur propre simple λ_2. Le système de Cramer que l'on obtient cette fois-ci, en dérivant l'égalité polynomiale issue de la division euclidienne puis en évaluant en les λ_k est

$$\begin{cases} \lambda_1^n = a_n \lambda_1^2 + b_n \lambda_1 + c_n \\ n\lambda_1^{n-1} = 2a_n \lambda_1 + b_n \\ \lambda_2^n = a_n \lambda_2^2 + b_n \lambda_2 + c_n \end{cases}$$

En écrivant $\lambda_k = \rho_k e^{i\theta_k}$, on voit en appliquant les formules de Cramer que les coefficients de A^n sont des combinaisons linéaires de termes en $n^{k_1} \rho_1^n e^{in\theta_1}$, où $k_1 \in \{0, 1\}$ et en $\rho_2^n e^{in\theta_2}$.

3e cas : si λ_1 est valeur propre triple. On procède de même en dérivant deux fois l'égalité polynomiale. On obtient cette fois pour coefficients de A^n des combinaisons linéaires de termes de la forme $n^{k_1} \rho_1^n e^{i\theta_1 n}$ avec $k_1 \in \{0, 1, 2\}$.

III.9 (a) De la relation $A^n = (\omega_{ij}(n))$, on déduit immédiatement que $\gamma(0) = A^0 = I_3$ et $\gamma(1) = A^1 = A$.

(b) Cela découle immédiatement de la relation $A^{n+m} = A^n A^m$.

(c) D'après III.7.c., il suffit d'établir que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = g(n)$ (on remarque que f et g sont bien des éléments de F d'après III.6.b.). En calculant le terme d'indice (i, j) de la matrice $A^{n+m} = A^n A^m$, on trouve d'une part, par définition, $\omega_{i,j}(n + m)$, et d'autre part en appliquant le produit matriciel, $\sum_{k=1}^{3} \omega_{ik}(n)\omega_{ij}(m)$. On en déduit que $f(n) = g(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui permet de conclure que $f = g$.

On peut ensuite écrire successivement pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\gamma(x+m) &= (\omega_{ij}(x+m)) = (f(x)) = (g(x)) \\ &= \left(\sum_{k=1}^{3} \omega_{ik}(x)\omega_{kj}(m)\right) = \gamma(x)\gamma(m).\end{aligned}$$

(d) Fixons $x \in \mathbb{R}$. Les coefficients de la matrice $\gamma(x + y)$ sont les fonctions $y \mapsto \omega_{ij}(x + y)$, éléments de F. Évaluées en $m \in \mathbb{N}$, ces fonctions valent $\omega_{ij}(x + m) = \omega_{ij}(x)\omega_{ij}(m)$. En appliquant une nouvelle fois III.7.c., on obtient que pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\omega_{ij}(x + y) = \omega_{ij}(x)\omega_{ij}(y)$, d'où $\gamma(x + y) = \gamma(x)\gamma(y)$.

III.10 On fait $x = 1$ et $y = -1$ dans la relation $\gamma(x + y) = \gamma(x)\gamma(y)$ pour obtenir $I_3 = A\gamma(-1)$. On en déduit que $A^{-1} = \gamma(-1)$.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On procède par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$ pour montrer que $\gamma(\frac{k}{p}) = \gamma(\frac{1}{p})^k$. C'est trivialement vrai pour $k = 1$ et l'hérédité se prouve en prenant $x = k/p$ et $y = 1/p$ dans la relation $\gamma(x + y) = \gamma(x)\gamma(y)$.

On en déduit en particulier pour $k = p$ que $\gamma(1) = \gamma(\frac{1}{p})^p$. Or $\gamma(1) = A$, d'où le résultat.

III.11 Une fonction à valeurs dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ est dérivable si et seulement si chacune des 9 fonctions coefficients est dérivable. Ces fonctions sont des combinaisons linéaires de termes en $t^k \rho^t e^{i\theta t}$, qui sont dérivables comme produits de fonctions usuelles dérivables.

Fixons $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\gamma(t+x) = \gamma(t)\gamma(x)$. D'après le cours, on sait que la dérivée d'une composée $f \circ g$, où f est linéaire et g est dérivable à valeurs vectorielles est $(f \circ g)' = f \circ g'$. On en déduit que $\gamma'(t + x) = \gamma'(t)\gamma(x)$ (ici la fonction linéaire est la multiplication à droite par la matrice $\gamma(x)$). En particulier, pour $t = 0$, on obtient $\gamma'(x) = \gamma'(0)\gamma(x)$. Enfin, on a déjà vu que $\gamma(0) = I_3$.

D'après le cours sur les équations différentielles linéaires à valeurs vectorielles, l'unique solution au problème de Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) = \gamma'(0)u(t) \\ u(0) = I_3 \end{cases}$$

est $\gamma(t) = \exp(t\gamma'(0)) \times I_3 = \exp(t\gamma'(0))$. En particulier, en $t = 1$ on obtient $A = \exp(\gamma'(0))$.

Troisième partie

III.12 On trouve $\chi_A = (X + 1)(X - 2)^2$. Comme le rang de $A - 2I_2$ est 2, la dimension de l'espace propre associé à 2 est 1 par le théorème du rang. On en déduit que A n'est pas diagonalisable.

III.13 Pour répondre aux questions qui suivent, nous allons déterminer explicitement la matrice $\gamma(t)$. On commence par chercher une expression de A^n. En suivant la méthode du paragraphe explicatif, on est amené à résoudre

$$\begin{cases} (-1)^n = a - b + c \\ 2^n = 4a + 2b + c \\ n2^{n-1} = 4a + b \end{cases}$$

On trouve $a = \frac{(-1)^n}{9} + \frac{n2^n}{6} - \frac{2^n}{9}$, $b = -(-1)^n\frac{4}{9} + \frac{4}{9}2^n - \frac{n2^n}{6}$ et $c = (-1)^n\frac{4}{9} + \frac{5}{9}2^n - \frac{n2^n}{3}$. D'où l'on déduit

$$A^n = aA^2 + bA + cI_3 = \begin{pmatrix} 2^n + \frac{1}{2}n2^n & 0 & \frac{1}{2}n2^n \\ \frac{1}{2}n2^n & (-1)^n & -2^n + (-1)^n + \frac{1}{2}n2^n \\ -\frac{1}{2}n2^n & 0 & 2^n - \frac{1}{2}n2^n \end{pmatrix}.$$

La matrice $\gamma(t)$ correspondante est

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} 2^t + \frac{1}{2}t2^t & 0 & \frac{1}{2}t2^t \\ \frac{1}{2}t2^t & e^{i\pi t} & -2^t + e^{i\pi t} + \frac{1}{2}t2^t \\ -\frac{1}{2}t2^t & 0 & 2^t - \frac{1}{2}t2^t \end{pmatrix}.$$

(a) D'après III.10, $A^{-1} = \gamma(-1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -1 & -\frac{7}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$.

(b) D'après III.10, on peut prendre $B = \gamma(\frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} \frac{5}{4}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{4}\sqrt{2} \\ \frac{1}{4}\sqrt{2} & i & -\frac{3}{4}\sqrt{2} + i \\ -\frac{1}{4}\sqrt{2} & 0 & \frac{3}{4}\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

(c) D'après III.11, on peut prendre $M = \gamma'(0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \ln 2 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & i\pi & -\ln 2 + i\pi + \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \ln 2 - \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.