

Exercice MPSI

1. Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$.
 - a. On suppose que f est continue. Montrer que f admet un point fixe.
 - b. On suppose que f est croissante. Montrer que f admet un point fixe.
2. Soient f et g des fonctions continues de $[0; 1]$ dans $[0; 1]$ telles que $f \circ g = g \circ f$.
 - a. Montrer que l'ensemble des points fixes de f possède un plus grand et un plus petit élément.
 - b. Montrer l'existence de $c \in [0; 1]$ tel que $f(c) = g(c)$.

Exercice 1

Soit (E, N) un espace vectoriel normé.

Soient p et q deux projecteurs de E .

1. Dans cette question, on suppose que $rg(p) < rg(q)$.
 - a. Montrer qu'il existe un vecteur non nul $x \in \ker p \cap \operatorname{im} q$.
 - b. Comparer les normes de x et de $(p - q)(x)$.
2. En déduire que si $\forall x \in E \setminus \{0\}, N((q - p)(x)) < N(x)$, alors p et q ont même rang.

Exercice 2

Soient K et L deux compacts non vides et disjoints. Montrer que

$$d(K, L) = \inf_{x \in K, y \in L} \{\|y - x\|\} > 0.$$