Pour le lundi 6 novembre 2017

Exercice MPSI :
Soient a et b deux réels, $a < b$. On considère la fonction $f : [a,b] \longrightarrow [a,b]$ supposée continue et une suite récurrente $(u_n)_n$ définie par : $u_0 \in [a,b]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. On suppose ici que f est croissante. Montrer que $(u_n)_n$ est monotone et en déduire sa convergence vers une solution de l'équation $f(x) = x$.

2. *Application.* Calculer la limite de la suite définie par : $u_0 = 4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{4u_n+5}{u_n+3}$.

3. On suppose maintenant que f est décroissante. Montrer que les suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont monotones et convergentes.

4. *Application.* Soit $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = (1-u_n)^2$. Calculer les limites des suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$.

Exercice : Norme p de Minkowski
Soient $p > 1$ et $q > 1$ tel que $1/p + 1/q = 1$.

1. a. Soit $y \in \mathbb{R}_+^*$ et $\Delta_y : x \mapsto \dfrac{\ln x - \ln y}{x - y}$. Montrer que Δ_y est décroissante sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{y\}$.

b. En déduire que pour tout $x < y$ réels strictement positifs et tout $t \in [0,1]$,

$$\ln(tx + (1-t)y) \geqslant t\ln(x) + (1-t)\ln(y).$$

(on dit que la fonction ln est concave)

c. En déduire que pour $a, b \geqslant 0$,

$$ab \leqslant \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$$

Pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ et $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n$, on pose :

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \quad \text{et} \quad \|y\|_q = \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{1/q}$$

2. Soit x et y dans $\mathbb{K}^n$ non nuls. Établir

$$\frac{|x_i y_i|}{\|x\|_p \|y\|_q} \leqslant \frac{1}{p}\frac{|x_i|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q}\frac{|y_i|^q}{\|y\|_q^q}$$

et en déduire

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leqslant \|x\|_p \|y\|_q$$

3. En écrivant

$$(|x_i| + |y_i|)^p = |x_i|(|x_i| + |y_i|)^{p-1} + |y_i|(|x_i| + |y_i|)^{p-1}$$

justifier

$$\|x + y\|_p \leqslant \|x\|_p + \|y\|_p$$

4. Conclure que $\|.\|_p$ définit une norme sur $\mathbb{K}^n$.