

Obligatoire : rédiger l'exercice MPSI et au moins la partie A du problème.

**Exercice MPSI :**

Soit  $\varphi$  qui à  $P$  élément de  $\mathbb{R}_{2n}[X]$  associe  $\varphi(P) = (X^2 - 1)P' - 2nXP$ .

Vérifier que  $\varphi$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_{2n}[X]$  puis déterminer les valeurs et vecteurs propres de  $\varphi$ .

Pour cela, on cherchera les fonctions  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telles que  $y' - \frac{2nx}{x^2 - 1}y = 0$  en faisant la décomposition en éléments simples de  $\frac{2nX}{X^2 - 1}$ .

Pour les 5/2 :  $\varphi$  est-elle diagonalisable ?

**Problème :**

Dans ce problème, on désigne par  $\bar{z}$  le conjugué du nombre complexe  $z$ .

Pour  $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ , on désigne par  $M(a, b)$  la matrice carrée complexe  $M(a, b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ .

Une matrice de la forme  $M(a, b)$  sera appelée *quaternion*. On considèrera en particulier les quaternions  $e = I_2 = M(1, 0)$ ,  $I = M(0, 1)$ ,  $J = M(i, 0)$ ,  $K = M(0, i)$  et on notera  $\mathbb{H} = \{M(a, b) \mid (a, b) \in \mathbb{C}^2\}$  le sous-ensemble de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  constitué par tous les quaternions.

On veillera à ne pas confondre la matrice  $I = M(0, 1)$  et la matrice unité  $I_2 = e = M(1, 0)$ .

**A Le « corps » des quaternions**

On munit l'ensemble  $\mathcal{C} = \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  des matrices complexes à deux lignes et deux colonnes de l'addition  $+$ , de la multiplication  $\times$  usuelles et de la multiplication par **un réel** notée  $\cdot$  et définie usuellement par

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} \in \mathcal{C}, \quad \lambda \cdot M = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda a \end{pmatrix}$$

On rappelle que  $(\mathcal{C}, +, \times, \cdot)$  est une algèbre sur le corps **des réels**.

**A.1** (a) Donner, sans justification, une base et la dimension de  $\mathcal{C}$  sur le corps **des réels**  $\mathbb{R}$ .

(b) Montrer que  $\mathbb{H}$  est un sous-espace vectoriel **réel** de  $\mathcal{C}$  et que  $\{e, I, J, K\}$  en est une base sur le corps  $\mathbb{R}$ .

(c) Montrer que  $\mathbb{H}$  est stable par multiplication.

**A.2** Montrer que  $(\mathbb{H} \setminus \{0\}, \times)$  est un sous-groupe non commutatif du groupe linéaire  $(\mathcal{GL}_2(\mathbb{C}), \times)$ .

$(\mathbb{H}, +, \times)$  a toutes les propriétés d'un corps sauf la commutativité de  $\times$  : on dit que c'est un *anneau à divisions* (ou, parfois, un *corps non commutatif*).

**A.3** Calculer les produits deux à deux des matrices  $e, I, J, K$ . On présentera les résultats dans une table à double entrée.

**B Conjugaison et normes**

Ainsi tout élément  $q \in \mathbb{H}$  s'écrit de manière unique  $q = xe + yI + zJ + tK$  avec  $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ .

Pour  $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$  et  $q = xe + yI + zJ + tK \in \mathbb{H}$  on pose  $q^* = xe - yI - zJ - tK \in \mathbb{H}$  et  $N(q) = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \in \mathbb{R}_+$ .

**B.1** (a) Vérifier que, pour tout  $q \in \mathbb{H}$ ,  $q^*$  est la transposée de la matrice dont les coefficients sont les conjugués des coefficients de  $q$ .

(b) En déduire que, pour tout  $(q, r) \in \mathbb{H}^2$ ,  $(qr)^* = r^*q^*$ .

(c) Montrer que  $q^{**} = q$  pour tout  $q \in \mathbb{H}$  et que  $q \mapsto q^*$  est un automorphisme du  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathbb{H}$ .

(d) Pour  $q \in \mathbb{H}$ , exprimer  $qq^*$  à l'aide de  $N(q)$ . En déduire que la fonction  $N$  est un morphisme de groupes de  $(\mathbb{H}^*, \times)$  dans  $(\mathbb{R}_+, \times)$ .

**B.2** (a) Soient  $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$  et  $q = xe + yI + zJ + tK$ . Exprimer la trace de la matrice  $q \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  en fonction du réel  $x$ .

(b) En déduire que, pour tout  $(q, r) \in \mathbb{H}^2$ ,  $qr - rq = q^*r^* - r^*q^*$ .

(c) Soient  $a, b, c, d$  des quaternions. Établir la relation  $(acb^*)d + d^*(acb^*)^* = (acb^*)^*d^* + d(acb^*)$ .

En déduire l'identité  $(N(a) + N(b))(N(c) + N(d)) = N(ac - d^*b) + N(bc^* + da)$ .

## CORRECTIONS :

### Exercice MPSI :

On vérifie que  $\varphi$  est linéaire car  $\varphi(\lambda P + Q) = \dots = \lambda\varphi(P) + \varphi(Q)$  notamment par linéarité de la dérivation des polynômes.

Si  $\deg(P) \leq (2n - 1)$ , alors  $\deg(P') \leq 2n - 2$  et par conséquent,  $\deg(\varphi(P)) \leq 2n$  par opérations sur les degrés. Il reste à étudier le cas du polynôme  $X^{2n}$ .

$$\varphi(X^{2n}) = (X^2 - 1) \cdot (2nX^{2n-1}) - 2nX \cdot X^{2n} = -2nX^{2n-1} \in \mathbb{R}_{2n}[X].$$

Finalement, par linéarité et en combinant les deux résultats précédents,  $\varphi$  est bien à valeurs dans  $\mathbb{R}_{2n}[X]$  et est donc un endomorphisme de  $\mathbb{R}_{2n}[X]$ .

L'équation différentielle  $y' - \frac{2nx}{x^2 - 1}y = 0$  est linéaire d'ordre 1 et normalisée. D'après le théorème de Cauchy pour une EDLO1, l'espace des solutions est une droite vectorielle engendrée par  $y : x \mapsto \exp \int_0^x \frac{2nt}{t^2 - 1} = \exp n \int_0^x \frac{2t}{t^2 - 1} = \exp n \ln(x^2 - 1) = (x^2 - 1)^n$ .

Soit alors  $P$  vecteur propre de  $\varphi$ . Alors  $P \neq 0$  et il existe  $\lambda \in \mathbb{C}$  tel que  $(X^2 - 1)P' - 2nXP = \lambda P$ , c'est à dire dans le corps des fractions rationnelles  $P' - \frac{2nX + \lambda}{X^2 - 1}P = P' - \frac{1}{2} \left( \frac{2n + \lambda}{X - 1} - \frac{-2n + \lambda}{X + 1} \right) P$ .

La fonction polynomiale  $P$  est donc solution de l'équation différentielle  $y' - \frac{1}{2} \left( \frac{2n + \lambda}{x - 1} - \frac{-2n + \lambda}{x + 1} \right) y = 0$  qui se résout comme la précédente pour trouver la solution  $y(x) = (x - 1)^{n+\lambda/2}(x + 1)^{n-\lambda/2}$ .

Cette fonction est un polynôme ssi  $\lambda/2$  est entier et si  $0 \leq \lambda \leq 2n$ .

Donc les valeurs propres sont exactement les entiers pairs entre  $-2n$  et  $2n$  et pour tout  $2k \in [-2n, 2n]$ , le polynôme  $P_k = (X - 1)^{n+k}(X + 1)^{n-k}$  est un vecteur propre associé à la valeur propre  $2n - 2k$ .

Pour les  $5/2$  : il y a  $2n + 1$  valeurs propres pour un endomorphisme de  $\mathbb{R}_{2n}[X]$  qui est de dimension  $2n + 1$  donc  $\varphi$  est diagonalisable.

## Problème

### II.A Le « corps » des quaternions

**II.A.1** (a) La dimension de  $\mathcal{C}$  sur  $\mathbb{R}$  vaut  $4 \times 2 = 8$  et que

$$(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2}, iE_{1,1}, iE_{1,2}, iE_{2,1}, iE_{2,2})$$

en est une base ( $E_{i,j}$  est la matrice élémentaire dont le terme en position  $(i, j)$  vaut 1 et les autres zéro).

(b) Si l'on écrit  $a = \alpha + i\beta$  et  $b = \gamma + i\delta$  avec  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$ , on a

$$M(a, b) = \begin{pmatrix} \alpha + i\beta & -\gamma - i\delta \\ \gamma - i\delta & \alpha - i\beta \end{pmatrix} = \alpha e + \beta J + \gamma I + \delta K.$$

Ceci prouve que  $\mathbb{H} = \text{Vect}_{\mathbb{R}}(e, I, J, K)$ , et en particulier que c'est un sous-espace vectoriel réel de  $\mathcal{C}$ . Par ailleurs, il est aisé de vérifier que la famille  $(e, I, J, K)$  est libre, donc que c'est une base de  $\mathbb{H}$ .

(c) Soit  $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$ . On calcule le produit

$$\begin{aligned} M(a, b)M(c, d) &= \begin{pmatrix} a & -b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -d \\ \bar{d} & \bar{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac - b\bar{d} & -ad - b\bar{c} \\ \bar{b}c + a\bar{d} & -\bar{b}d + a\bar{c} \end{pmatrix}, \\ &= M(ac - b\bar{d}, ad + b\bar{c}). \end{aligned}$$

Le résultat appartient à  $\mathbb{H}$ , donc  $\mathbb{H}$  est stable par multiplication.

**II.A.2** Tout d'abord,  $\det M(a, b) = a\bar{a} + b\bar{b} = |a|^2 + |b|^2$  est nul si et seulement si  $a = b = 0$ , c'est-à-dire dans le cas où  $M(a, b)$  est la matrice nulle. Ceci prouve que

$$(\mathbb{H} \setminus \{0\}) \subset \text{GL}_2(\mathbb{C}).$$

La partie  $\mathbb{H}$  de  $\text{GL}_2(\mathbb{C})$  est non vide (elle contient  $e = I_2$ ), stable par produit d'après la question II.A.1.c, et stable par inverse car on vérifie facilement grâce à la même question que

$$\forall (a, b) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \quad [M(a, b)]^{-1} = M\left(\frac{\bar{a}}{|a|^2 + |b|^2}, -\frac{b}{|a|^2 + |b|^2}\right).$$

C'est donc un sous-groupe de  $\text{GL}_2(\mathbb{C})$ . Il n'est pas commutatif car  $K = IJ \neq JI = -K$ .

**II.A.3** (a) On ne détaille pas les calculs. Voici la table, où l'on place le produit  $AB$  à l'intersection de la ligne  $A$  et de la colonne  $B$  :

$\times$	$e$	$I$	$J$	$K$
$e$	$e$	$I$	$J$	$K$
$I$	$I$	$-e$	$K$	$-J$
$J$	$J$	$-K$	$-e$	$I$
$K$	$K$	$J$	$-I$	$-e$

## II.B Conjugaison et normes

**II.B.1** (a) Avec les notations de l'énoncé, si l'on pose  $a = x + iz$  et  $b = y - it$ ,

$$q = xe + yI + zJ + tK = \begin{pmatrix} x + iz & -y + it \\ y + it & x - iz \end{pmatrix} = M(a, b),$$

$$q^* = xe - yI - zJ - tK = \begin{pmatrix} x - iz & y - it \\ -y - it & x + iz \end{pmatrix} = {}^t\overline{M(a, b)}.$$

On obtient bien le résultat attendu, en notant  $\overline{A}$  la matrice dont les éléments sont les conjugués de ceux de  $A$  (on utilisera librement cette notation dans la suite du problème).

(b) On vérifie aisément que  $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$  pour toutes matrices complexes multipliables (cela résulte de ce que la conjugaison dans  $\mathbb{C}$  est un morphisme pour l'addition et la multiplication dans  $\mathbb{C}$ ). Par ailleurs, le cours affirme que la transposition est un antimorphisme multiplicatif, c'est-à-dire que  ${}^t(A \times B) = {}^tB \times {}^tA$  toutes matrices complexes multipliables. Il en résulte que

$$\forall (q, r) \in \mathbb{H}^2, \quad (qr)^* = {}^t(\overline{qr}) = {}^t(\overline{q}\overline{r}) = {}^t\overline{{}^tr}{}^t\overline{q} = r^*q^*.$$

(c) Le résultat vient de ce que la conjugaison dans  $\mathbb{C}$  et la transposition sont deux involutions, et aussi du fait qu'elles commutent, c'est-à-dire de l'égalité  $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), {}^t\overline{A} = \overline{{}^tA}$ . Alors

$$\forall q \in \mathbb{H}, \quad q^{**} = {}^t(\overline{{}^tq}) = {}^t({}^t\overline{q}) = {}^t({}^tq) = q.$$

Ensuite, la  $\mathbb{R}$ -linéarité de  $q \mapsto q^*$  est évidente, et le fait que  $q^{**} = q$  montre que  $q \mapsto q^*$  est une involution de  $\mathbb{H}$ , donc une bijection de  $\mathbb{H}$  : c'est donc un automorphisme du  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathbb{H}$ .

REMARQUES. — C'est même un automorphisme involutif de  $\mathbb{H}$ , c'est-à-dire une symétrie vectorielle de  $\mathbb{H}$ , par rapport à la droite  $\text{Vect}_{\mathbb{R}}(e)$  et parallèlement à l'hyperplan  $\text{Vect}_{\mathbb{R}}(I, J, K)$ . L'application  $q \mapsto q^*$  est appelée la conjugaison dans  $\mathbb{H}$ , et  $q^*$  est appelé le conjugué du quaternion  $q$ . Cette analogie entre complexes et quaternions est mise à profit à la question II.B.2.b.

(d) Soient  $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ ,  $(a, b) = (x + iz, y - it) \in \mathbb{C}^2$ , et  $q = M(a, b)$ . Alors la question II.A.1.c montre que

$$qq^* = M(a, b){}^tM(\overline{a}, \overline{b}) = M(a\overline{a} + b\overline{b}, -a\overline{b} + b\overline{a}) = M(|a|^2 + |b|^2, 0) = N(q)e.$$

On peut aussi mener un calcul à partir de la table et du H-système de la question II.A.3 :

$$\begin{aligned} qq^* &= (xe + yI + zJ + tK)(xe - yI - zJ - tK), \\ &= x^2e - xyI - xzJ - xtK + yxI - y^2I^2 - yzIJ - ytIK \\ &\quad + zxJ - zyJI - z^2J^2 - ztJK + txK - tyKI - tzKJ - t^2K^2, \\ &= (x^2 + y^2 + z^2 + t^2)e - yz(IJ + JI) - yt(IK + KI) - zt(JK + KJ), \\ &= N(q)e. \end{aligned}$$

On calcule ensuite  $(qr)(qr)^*$  de deux manières : d'une part, la relation ci-dessus montre que ce produit vaut  $N(qr)e$ . D'autre part, la question II.B.1.b donne

$$\begin{aligned} (qr)(r^*q^*) &= q(rr^*)q^* = q(N(r)e)q^* = N(r)qq^* = N(r)N(q)e, \\ &= N(q)N(r)e. \end{aligned}$$

Comme  $N(qr)$  et  $N(q)N(r)$  sont des nombres et que  $e$  est un vecteur non nul d'un espace vectoriel, l'égalité  $N(qr)e = N(q)N(r)e$  entraîne l'égalité

$$\forall (q, r) \in \mathbb{H}^2, \quad N(qr) = N(q)N(r).$$

**II.B.2** (a) Par linéarité de la trace, on obtient

$$\mathrm{tr}(q) = \mathrm{tr}(xe + yI + zJ + tK) = 2x.$$

- (b) On appelle *quaternion réel* (respectivement *quaternion pur*) un quaternion de la forme  $xe$  avec  $x$  réel (respectivement  $yI + zJ + tK$  avec  $y, z, t$  réels), et on note  $\mathbf{R}$  et  $\mathbf{P}$  les sous-ensembles formés des quaternions réels et des quaternions purs respectivement.

Il est clair que  $\mathbf{R}$  et  $\mathbf{P}$  sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de  $\mathbb{H}$ , donc que l'égalité de deux quaternions équivaut à l'égalité de leurs parties réelles et de leurs parties pures (appellations évidentes). D'après la question précédente et la définition du conjugué, la partie réelle et la partie pure de  $q \in \mathbb{H}$  sont données par

$$\mathrm{Re}(q) = \frac{\mathrm{tr}(q)}{2}e = \frac{q + q^*}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{Pur}(q) = \frac{q - q^*}{2}.$$

Comme la trace vérifie  $\forall(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$ ,  $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ , les traces de  $u := qr - rq$  et de  $v := q^*r^* - r^*q^*$  sont nulles, donc ces deux quaternions ont la même partie réelle. Enfin, comme  $v = -u^*$ , on a

$$\mathrm{Pur}(v) = \frac{v - v^*}{2} = \frac{-u^* + u^{**}}{2} = \frac{u - u^*}{2} = \mathrm{Pur}(u).$$

Les quaternions  $u$  et  $v$  sont donc égaux.

- (c) On applique la question précédente à  $q = acb^*$  et  $r = d$ , en écrivant l'égalité sous la forme  $qr + r^*q^* = q^*r^* + rq$ . On obtient le résultat attendu :

$$(acb^*)d + d^*(acb^*)^* = (acb^*)^*d^* + d(acb^*).$$

On utilise ensuite la relation  $\forall q \in \mathbb{H}$ ,  $qq^* = N(q)e$  et son corollaire  $\forall(q, r) \in \mathbb{H}^2$ ,  $qrr^*q = qq^*rr^*$ , et on l'applique au membre de droite de l'inégalité à démontrer (les termes soulignés se simplifient en vertu de la relation ci-dessus) :

$$\begin{aligned} & [N(ac - d^*b) + N(bc^* + da)]e \\ &= (ac - d^*b)(ac - d^*b)^* + (bc^* + da)(bc^* + da)^*, \\ &= (ac - d^*b)(c^*a^* - b^*d) + (bc^* + da)(cb^* + a^*d^*), \\ &= aa^*cc^* - \underline{(acb^*)d} - d^*(acb^*)^* + bb^*dd^* \\ &\quad + \underline{bb^*cc^* + (acb^*)^*d^* + d(acb^*)} + aa^*dd^*, \\ &= aa^*cc^* + bb^*dd^* + bb^*cc^* + aa^*dd^*, \\ &= (aa^* + bb^*)(cc^* + dd^*) = [(N(a) + N(b))(N(c) + N(d))]e. \end{aligned}$$

On en déduit que pour tous les quaternions  $a, b, c$  et  $d$  :

$$(N(a) + N(b))(N(c) + N(d)) = N(ac - d^*b) + N(bc^* + da).$$